Løsning: Prøve-eksamen I MET1190 Statistikk

1. a) A = du vinner et spill

$p(A) = 15/36 = \underline{\underline{5/12}}$ siden det er $6 \times 6 = 36$ mulige utfall, og du vinner i 15 av disse utfallene

$\left(\frac{36-6}{2} = \frac{30}{2} = 15\right.$ ettersom 6 utfall gir like terninger)

b) X = antall spill du vinner (blant 50)

X er binomisk fordelt med $p = p(A) = \underline{5/12}$ og $n = 50$,

og tilnærmet normalfordelt med $\mu = E(X) = np = \frac{250}{12} \simeq \underline{20.83}$

og $\sigma^2 = Var(X) = np(1-p) = \frac{250}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1750}{144} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1750}{144}} \simeq \underline{3.486}$

$\simeq 12.15$

(tilnærmingen er ganske god siden $Var(X) = np(1-p) \simeq 12 > 5$)

Med normaltilnærming og heltallskorreksjon får vi:

$$p(X \geq 20) = 1 - p(X \leq 19) \cong 1 - G\left(\frac{19.5 - 20.83}{3.486}\right)$$

$$\cong 1 - 0.351 = 0.649 \simeq \underline{\underline{0.65}}$$

(Uten tilnærming er $p(X \geq 20) \simeq 0.646 \simeq 0.65$)

c) Dersom du vinner et spill, vil du doble pengene. Siden $2^4 = 16$ (mens $2^3 = 8$), må du vinne 4 ganger for å få mer enn 30.000 kr (2.000 kr × 16 = 32.000 kr).

$p(VVVV) = p(A)^4 = (5/12)^4 \simeq 0.030$ ← Gevinst: 32.000 − 2000 = 30.000 kr

$p(\text{taper alt}) = 1 - (5/12)^4 \simeq 0.970$ ← Tap: 2000 kr

Forventet total gevinst: $(5/12)^4 \cdot 30.000 + (1 - (5/12)^4) \cdot (-2000)$

$= (5/12)^4 \cdot 32000 - 2000 \simeq \underline{\underline{-1035 \text{ kr}}}$

Sannsynlighet for å tape alt: $1 - (5/12)^4 \simeq \underline{\underline{0.97}}$

2.

a) Hypoteser:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0:\ p \geq 1/3 \\ H_1:\ p < 1/3 \end{array}}$$

p = andelen terningkast som gir 5 eller 6

$p_0 = 1/3$

Testobservator:

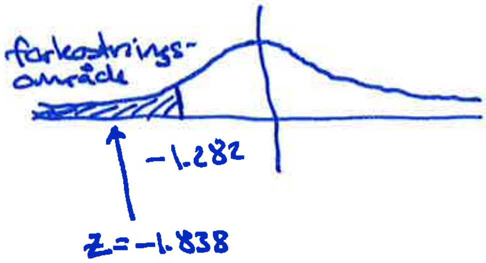
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

$\hat{p} = \frac{X}{n}$ $\begin{cases} X = \text{antall kast som gir 5 eller 6} \\ n = 25 \end{cases}$

Forkastningsområde: $\alpha = 0.10$

$$\boxed{Z < -z_\alpha = -1.282}$$

siden Z er tilnærmet normalfordelt når $p = p_0$; $np_0(1-p_0) = 50/9 > 5$



Realisert z-verdi:

$$Z = \frac{4 - 25 \cdot 1/3}{\sqrt{25 \cdot 1/3 \cdot 2/3}} \simeq -1.838$$

Vi forkaster H_0; $p < 1/3$

b) Hypoteser:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0:\ \mu = 3.5 \\ H_1:\ \mu \neq 3.5 \end{array}}$$

μ = gjennomsnittlig terningkast

$\mu_0 = 3.5$

Testobservator:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{3.28 - 3.50}{1.568/\sqrt{25}} \simeq -0.701$$

($t = -0.701$ er realisert verdi av T)

P-verdi:

$$P(|T| > 0.701) = 2 \cdot P(T < -0.701) = \underline{\underline{0.49}}$$

c) Hypoteser:

$H_0: p \leq 1/6$

$H_1: p > 1/6 = p_0$

p = sannsynlighet for å slå 1

$p_0 = 1/6$

p-verdi 0,043: Siden p-verdien er mindre enn $\alpha = 0.05$, er observert resultat usannsynlig (under kritisk grense) gitt at H_0 er sann.

Vi forkaster H_0; $p > 1/6$

3.

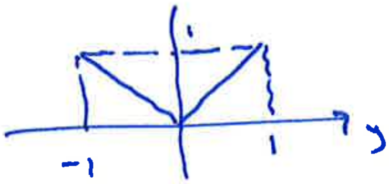
a) $X \sim N(123, 11)$ siden X normalfordelt med $\mu = E(X) = 123$, $\sigma^2 = Var(X) = 121 \Rightarrow \sigma = \sqrt{121} = 11$.

$\Downarrow$

$$Z = \frac{X - 123}{11} \sim N(0,1) \text{ std. normalfordelt}$$

$$P(120 < X < 130) = P(-3/11 < Z < 7/11) = G(7/11) - G(-3/11)$$
$$\simeq 0.7377 - 0.3925$$
$$\simeq \underline{\underline{0.345}}$$

b) $E(Y) = \int_{-1}^{1} y \cdot f(y)\,dy$



$$= \int_{-1}^{0} y \cdot (-y)\,dy + \int_{0}^{1} y \cdot y\,dy$$

$$= -y^3/3 \Big|_{-1}^{0} + y^3/3 \Big|_{0}^{1} = (0 - 1/3) + (1/3 - 0) = \underline{\underline{0}}$$

c) A: produsert av maskin A
B: — " — B
D: defekt

$P(A) = 0.80$ $P(D|A) = 0.05$
$P(B) = 0.20$ $P(D|B) = 0.01$

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B)}$$

$$= \frac{0.05 \cdot 0.80}{0.05 \cdot 0.80 + 0.01 \cdot 0.20} = \frac{0.04}{0.04 + 0.002} = \frac{0.04}{0.042}$$

$$= 40/42 = \underline{\underline{20/21}} \simeq \underline{\underline{0.95}}$$

4.

a) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot p(i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = (1 + \dots + 6) \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{\cancel{6} \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}} = \underline{\underline{3.5}}$

$E(Y) = E(X) = \underline{\underline{7/2}} = \underline{\underline{3.5}}$

$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = \underline{\underline{0}}$

b) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \cdot \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$= (1^2 + \dots + 6^2) \cdot \frac{1}{6} - \frac{49}{4} = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \underline{\frac{35}{12}}$

Dermed er

$Var(X-Y) = Var(1 \cdot X + (-1) \cdot Y) = 1^2 \cdot Var(X) + (-1)^2 \cdot Var(Y)$

$= Var(X) + Var(Y) = 2 \cdot \frac{35}{12} = \underline{\underline{35/6}} \simeq \underline{\underline{5.83}}$

(sian $Var(X) = Var(Y)$).

$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) + Cov(X,-Y) + Cov(Y,X)$

$+ Cov(Y,-Y) = Var(X) - Cov(X,Y) + Cov(X,Y) - Var(Y)$

$= Var(X) - Var(Y) = \underline{\underline{0}}$

c) To variabler U, V er uavhengige hvis

$p(U=u, V=v) = p(U=u) \cdot p(V=v)$ for alle u, v.

Sian $p(X+Y=3, X-Y=0) = 0$

$p(X+Y=3) \cdot p(X-Y=0) = \frac{2}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{108} \neq 0$

følger det at $X+Y, X-Y$ ikke er uavhengige

5.

a) Vi kaller avkastningen til hovedindeks (O) for X

— " — Bakkafrost (B) " Y

Korrelasjonskoeff. i utvalget:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \qquad (n=12)$$

$$\simeq -0.3861 \simeq -0.39$$

Estimat for regresjonslinjen:

$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ der

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = r \cdot \frac{S_y}{S_x} \simeq -0.6690 \simeq -0.67$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \simeq 0.1622 \simeq 0.16$$

$\Downarrow$

$$y = 0.16 - 0.67x$$

b) 90% Konfidensintervall for β:

$$\hat{\beta} \pm t_{\alpha/2}^{n-2} \cdot SE(\hat{\beta})$$

$\hat{\beta} = -0.67$

$$t_{\alpha/2}^{n-2} = t_{0.05}^{10} \simeq 1.8125$$

$$SE(\hat{\beta})^2 = \frac{\sigma^2}{(n-1)\cdot S_x^2}$$

der σ^2 estimeres ved $S^2 = \frac{1}{n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$

$$= \frac{1}{n-2}\cdot SS_E$$

$$= \frac{1}{n-2}(SS_T - SS_R)$$

$$= \frac{1}{n-2}(SS_T - R^2 \cdot SS_T)$$

$$= \frac{1}{n-2} SS_T \cdot (1-R^2)$$

Dette gir:

$$S^2 = \frac{1}{n-2} SS_T (1-R^2) = \frac{1}{n-2}(n-1) S_y^2 (1-R^2)$$

$$SE(\hat{\beta})^2 = \frac{S^2}{(n-1)S_x^2} = \frac{\frac{n-1}{n-2} S_y^2 (1-R^2)}{(n-1)S_x^2} = \frac{1}{n-2} \frac{S_y^2}{S_x^2}(1-R^2)$$

$$SE(\hat{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{n-2}\frac{S_y^2}{S_x^2}(1-R^2)} \simeq \sqrt{0{,}2555} = \underline{0.5055}$$

Konfidensintervall for $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} \pm t_{\alpha/2}^{n-2} \cdot SE(\hat{\beta}) = -0.669 \pm 1.8125 \cdot 0.5055$$

$$= \underline{\underline{(-1.59, 0.25)}}$$

Tolkning: β = ekstra kvartalsvis avkastning for Bakkafrost når avkastningen til totalindeksen er 1% høyere

Det er 90% sannsynlig at dette stigningstallet ligger i intervallet (−1.59, 0.25) om std. betingelser er oppfylt.

c) $\boxed{\begin{array}{l} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{array}}$

$$T = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{SE(\hat{\beta})} = \frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})}$$

t-fordelt med n-2 df når $\beta = \beta_0 = 0$.

Forkastningsområde:

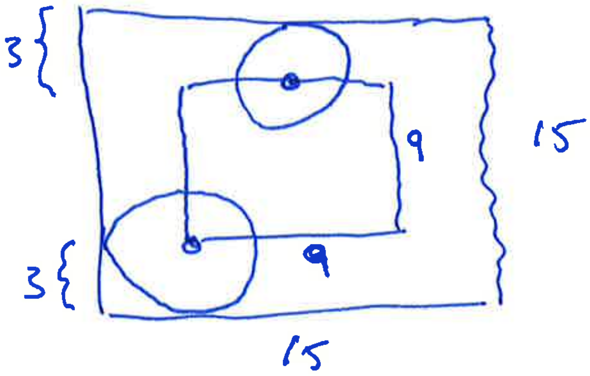
$$|T| > t_{\alpha/2}^{n-2} = 2.228$$

Realisert verdi:

$$t = \frac{-0.669}{0.5055} \simeq -1.32$$

Vi beholder H_0; ingen sammenheng

6.



Vi kan anta at myntens sentrum havner innenfor en 15×15-flis.

Siden myntens radius er $6/2 = 3$, havner hele mynten innenfor en flis (uten å berøre kantene) hvis og bare hvis myntens sentrum havner innenfor et mindre kvadrat, vist på figur, som er 9×9, siden

$$15 - 2 \cdot 3 = 9.$$

Sannsynlighet for å havne innenfor en flis (uten å lande på noen kant):

$$p = \frac{9 \cdot 9}{15 \cdot 15} = \frac{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{9}{25}}}$$

$$= \underline{\underline{36\%}}$$