Løsning, Eksamen MET1190 11/2018

1. **Velger:**

x = antall timer forberedelser

y = antall poeng på eksamen

i	x_i	y_i
1	150	45
2	170	67
3	200	99
4	170	35
5	100	46

a) Gj.snitt: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \underline{\underline{158}}$

Median: $\underline{\underline{170}}$

x-verdier i voksende rekkefølge:

100 150 170 170 200

Modus: $\underline{\underline{170}}$ (forekommer flest ganger)

b) $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \underline{\underline{1370}}$ $\quad s_x = \sqrt{s_x^2} = \underline{37.01}$

$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \underline{\underline{650.8}}$ $\quad s_y = \sqrt{s_y^2} = \underline{25.51}$

$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \underline{\underline{588.5}}$ $\quad r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \underline{0.623}$

Standardavviket $s_x = 37.01$: typisk avvik fra $\bar{x} = 158$ i x-verdi

— " — $s_y = 25.51$: — " — fra $\bar{y} = 58.4$ i y-verdi

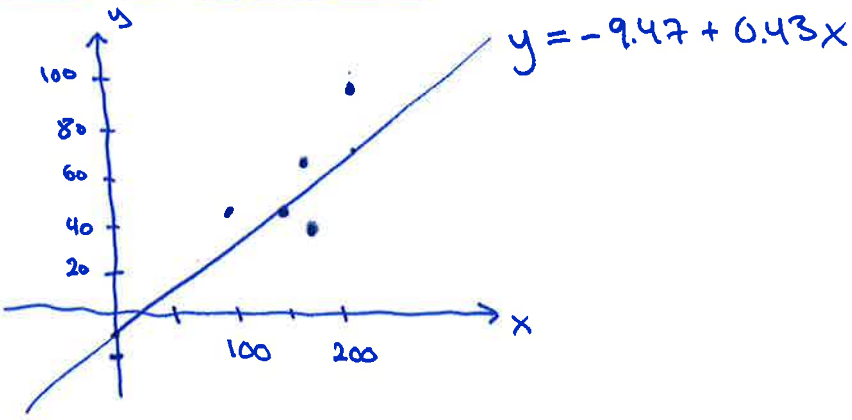
Korrelasjonskoeffisienten $r = 0.623$: positiv sammenheng mellom x og y $(r > 0)$, nokså sterk siden $|r| = 0.624$ er nokså stor/nær 1.

c) Estimat for regresjonslinjen $y = \alpha + \beta x$:

$\hat{\beta} = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = \underline{\underline{0.430}}$ $\quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\cdot\bar{x} = -\underline{\underline{9.47}}$

Dus: $\boxed{y = 0.430x - 9.47}$ estimat for regresjonslinjen

Spredningsdiagram:



d) $\hat{\alpha} = -9.47$: skjæringspunkt med y-aksen til regresjonslinjen

$\hat{\beta} = 0.43$: stigningstallet til regresjonslinjen; Kan tolkes som forventet uttelling 0.43p.

på eksamen per ekstra time forberedelser

e) 95% Konfidensintervall: Et intervall [A,B] slik at sannsynligheten for at $A \leq \theta \leq B$ er 95%, dvs

$$p(A \leq \theta \leq B) = 0.95$$

Grensene A, B er stokastiske variabler, og θ er parameteren vi lager konfidensintervall for (f.eks. β).

95% Konf. intervall for β:

$$\hat{\beta} \pm t^{n-2}_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\beta})$$

$$= 0.43 \pm 3.182 \cdot 0.311$$

$$= 0.43 \pm 3.182 \cdot 0.311$$

$$= 0.43 \pm 0.99$$

$$[-0.56, 1.42]$$

$\hat{\beta} = 0.43$ (se ovenfor)

$\alpha = 0.05, n = 5$ gir $t^{n-2}_{\alpha/2} = 3.182$

$$SE(\hat{\beta})^2 = \frac{\frac{1}{n-2} \cdot SSE}{(n-1) s_x^2} = \frac{\frac{1}{n-2} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot s_y^2 \cdot (1-r^2)}{\cancel{n-1} \cdot s_x^2}$$

$$= \frac{1}{n-2} \frac{s_y^2(1-r^2)}{s_x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$SE(\hat{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{n-2} \frac{s_y^2(1-r^2)}{s_x^2}} = 0.311$$

2.

a) Utfallsrom: $U = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$ 36 utfall

$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$ 5 utfall

$B = \{(1,6), \ldots, (6,6), \ldots, (6,1)\}$ 11 utfall

$A \cap B = \{(2,6), (6,2)\}$ $\quad p(A \cap B) = 2/36 = \underline{\underline{1/18}}$

$A \cup B = \{(1,6), \ldots (6,6), \ldots, (6,1), (3,5), (4,4), (5,3)\}$ $\quad p(A \cup B) = 14/36 = \underline{\underline{7/18}}$

b) X: Binomisk med $n = 6$, $p = 1/6$

$p(X = i) = \binom{6}{i}(1/6)^i (5/6)^{6-i}$ $\quad i = 0, 1, \ldots, 6$

$E(X) = np = \underline{\underline{1}}$ $\quad Var(X) = np(1-p) = \underline{\underline{5/6}}$

$p(X \leq 1) = p(0) + p(1) = (5/6)^6 + 6 \cdot 1/6 \cdot (5/6)^5 = (5/6)^6 + (5/6)^5 \simeq \underline{\underline{0.737}}$

c) X: Binomisk med $n = 600$, $p = 1/6$

$p(X = i) = \binom{600}{i} (1/6)^i (5/6)^{600-i}$, $i = 0, 1, \ldots, 600$

Tilnærmet normalfordelt $N(\mu, \sigma)$ med $\mu = E(X) = np = \underline{\underline{100}}$ og

$\sigma^2 = Var(X) = np(1-p) \simeq \underline{\underline{83.3}}$

(n er stor, $np(1-p) \simeq 83.3 > 5$)

$$p(X \leq 100) \simeq p\left(Z \leq \frac{100 + 1/2 - 100}{\sqrt{500/6}}\right) \simeq \underline{\underline{0.522}}$$

(normaltilnærming m/ heltallskorreksjon)

d) $$p = \frac{\binom{11}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{19}{3}} = \frac{11 \cdot 8 \cdot 7/2}{19 \cdot 18 \cdot 17/6} = \frac{308}{969} \simeq \underline{\underline{0.318}}$$

e) K: kvinne $\quad$ M: mann $\quad$ H: handler i butikken

$p(K) = 0.7$ $\quad p(H|K) = 0.4$ $\quad p(H) = 0.45$

$$p(M|H) = 1 - p(K|H) = 1 - \frac{p(K \cap H)}{p(H)} = 1 - \frac{p(H|K) \cdot p(K)}{p(H)}$$

$$= 1 - \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.45} = 1 - \frac{28}{45} = \underline{\underline{\frac{17}{45}}} \simeq 0.378$$

3.

a) $\bar{X} = \frac{1}{7}(X_1 + \dots + X_7)$ er (eksakt) normalfordelt med $E(\bar{X}) = \frac{1}{7} \cdot 7\mu = \mu$

og $\mathrm{var}(\bar{X}) = \frac{1}{7^2} \cdot (7\sigma^2) = \sigma^2/7$

siden: X_1, X_2 uavhengige normalfordelte variabler, c_1, c_2 konstanter $\Rightarrow$ $c_1 X_1 + c_2 X_2$ (eksakt) normalfordelt

b) $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{7}} = \dfrac{\bar{X} + 2}{S/\sqrt{7}}$, når $\mu = -2$ er T t-fordelt med 6 frihetsgrader

c) $H_1: \mu > -2$ høyresidig $\Rightarrow$ Forkastningsområde: $T > t_\alpha = 1.943$

$\bar{x} = -1.5886$

$s = 0.5749$

$\Downarrow$

$T = 1.8935$

Bruker: $\bar{x} = \frac{1}{7}(x_1 + \dots + x_7)$

$s = \sqrt{\frac{1}{6}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_7 - \bar{x})^2\right)}$

Siden T ikke havner i forkastningsområdet, beholder vi H_0

dvs: $\mu = -2$

(evt. $\mu \leq -2$)

d) p-verdi = sannsynlighet for minst like ekstrem T-verdi som den vi regner ut fra datasettet

$= P(T \geq 1.8935) = 0.054$

Fra resultatet i b)–c) ser vi at p-verdien må være noe større enn $\alpha = 0.05$.

e) $\dfrac{S^2 \cdot (n-1)}{\sigma^2}$ er χ^2-fordelt med 6 frihetsgrader

$P\left(\dfrac{6S^2}{\chi_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \dfrac{6S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha \xRightarrow{\alpha = 0.05} \begin{cases} 6s^2 = 1.9829 \\ \chi_{\alpha/2} = 14.449 \\ \chi_{1-\alpha/2} = 1.237 \end{cases}$

Konf. intervall: $[0.137, 1.603]$