

Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

En kontinuerlig stokastisk variabel X har mulige verdier $X(S) = [0,2]$ og uniform tetthetsfunksjon $f(x) = 1/2$ for $0 \leq x \leq 2$. Regn ut:

- a) $E(X)$ b) $\text{Var}(X)$ c) $p(0.7 \leq X \leq 1.1)$ d) $F(x)$

Oppgave 2.

En kontinuerlig stokastisk variabel X har mulige verdier $X(S) = [0,5]$ og tetthetsfunksjon $f(x) = 0.1x$ for $0 \leq x \leq 4$ og $f(x) = 2 - 0.4x$ når $4 \leq x \leq 5$. Tegn en skisse av tetthetsfunksjonen, og regn ut:

- a) $E(X)$ b) $\text{Var}(X)$ c) $p(2 \leq X \leq 3)$ d) $F(x)$

Oppgave 3.

En kontinuerlig stokastisk variabel med mulige verdier $X(S) = [0,2]$ har kumulativ fordelingsfunksjon $F(x) = x^3/8$ for $0 \leq x \leq 2$. Finn tetthetsfunksjonen $f(x)$, og bruk den til å bestemme $E(X)$.

Oppgave 4.

En kontinuerlig stokastisk variabel med mulige verdier $X(S) = [0,5]$ har tetthetsfunksjon på formen $f(x) = ax^2$ for $0 \leq x \leq 5$. Bestem a , og regn ut $E(X)$.

Oppgave 5.

En limtredrager er oppgitt å tåle 1100 kg. Den utsettes for en last X , som vi antar er normalfordelt med $\mu = 950$ og $\sigma = 120$ (verdiene til X måles i kg). Hva er sannsynligheten for at drageren utsettes for en last som er for stor, slik at den brekker?

Oppgave 6.

Vi antar at en stokastisk variabel X er normalfordelt med $\mu = 20$ og $\sigma = 5$. Marker følgende x -verdier på en tall-linje, og regn ut sannsynlighetene:

- a) $p(X < 15)$ b) $p(X > 23)$ c) $p(18 < X < 22)$ d) $p(|X - 20| > 3)$

Oppgave 7.

La Z være en standard-normalfordelt stokastisk variabel med kumulativ fordelingsfunksjon $G(z)$, og la $a = G(k)$ for et positivt tall $k > 0$. Uttrykk følgende sannsynligheter ved hjelp av a :

- a) $p(Z > k)$ b) $p(Z < -k)$ c) $p(-k < Z < k)$ d) $p(|Z| > k)$

Oppgave 8.

Vi antar at en stokastisk variabel Z er standard-normalfordelt. Finn k slik at

$$\text{a) } p(Z < k) = 0.95 \quad \text{b) } p(-k < Z < k) = 0.90 \quad \text{c) } p(Z > k) = 0.025 \quad \text{d) } p(|Z| > k) = 0.05$$

Oppgave 9.

Skriv ned definisjonen til α -kvantilet z_α til en standard-normalfordelt stokastisk variabel Z . Bruk så kalkulator til å finne z_α og $z_{\alpha/2}$ når $\alpha = 0.08$. Illustrer svarene ved hjelp av en skisse, der relevante areal er markert.

Oppgave 10.

Regn ut $E(aX + b)$ og $aE(X) + b$ ved hjelp av integrasjon når X er en kontinuerlig stokastisk variabel og a, b er konstanter, og vis at de to uttrykkene blir like.

Oppgave 11.

Oppgaver fra læreboken [L]: 4.15, 4.16, 4.18, 5.20, 5.25, 5.27, 5.28

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

$$\text{a) } 1 \quad \text{b) } 1/3 \quad \text{c) } 1/5 \quad \text{d) } F(x) = x/2$$

Oppgave 2.

$$\text{a) } 3 \quad \text{b) } 7/6 \quad \text{c) } 0.25 \quad \text{d) } F(x) = \begin{cases} x^2/20, & 0 \leq x \leq 4 \\ -4 + 2x - x^2/5, & 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Oppgave 3.

$$f(x) = 3x^2/8 \text{ og } E(X) = 3/2$$

Oppgave 4.

$$a = 3/125 \text{ og } E(X) = 3.75$$

Oppgave 5.

$$p(X > 1100) = 1 - G(1.25) \approx 0.106 = 10.6\%$$

Oppgave 6.

$$\begin{aligned} \text{a) } p(X < 15) &= G(-1) \approx 0.1587 & \text{b) } p(X > 23) &= 1 - G(0.6) \approx 0.274 \\ \text{c) } p(18 < X < 22) &= G(0.4) - G(-0.4) \approx 0.311 & \text{d) } p(|X - 20| > 3) &= 2G(-0.6) \approx 0.549 \end{aligned}$$

Oppgave 7.

$$\text{a) } 1 - a \quad \text{b) } 1 - a \quad \text{c) } 2a - 1 \quad \text{d) } 2 - 2a$$

Oppgave 8.

$$\text{a) } k \approx 1.645 \quad \text{b) } k \approx 1.645 \quad \text{c) } k \approx 1.96 \quad \text{d) } k \approx 1.96$$

Oppgave 9.

$$z_{0.08} \approx 1.405 \text{ og } z_{0.04} \approx 1.751$$