Plan:

1. Betinget sannsynlighet
2. Uavhengige hendelser

Pensum:

[L] 3.4 – 3.5

Repetisjon:

Stokastiske forsøk:

Utfallsrom $S = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

Sannsynlighetsmål p

$A \subseteq S \longrightarrow p(A) \leftarrow$ sannsynligheten for at A skjer

hendelse tall

Mengdelære:

Union: $A \cup B$

Snitt: $A \cap B$

Komplement: $A^c = \bar{A}$

Tomme mengde: $\emptyset$

Aksiomer (minste krav) til p:

i) $p(A) \geq 0$ for alle hendelser A

ii) $p(S) = 1$

iii) $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \dots$
når $A_1, A_2, \dots$ er parvis disjunkte
$(A_1 \cap A_2 = \emptyset,\ A_1 \cap A_3 = \emptyset,\ A_2 \cap A_3 = \emptyset, \dots)$

$\Downarrow$

Egenskaper:

a) $p(A^c) = 1 - p(A)$

b) $p(\emptyset) = 0$

c) $p(A) \leq p(B)$ når $A \subseteq B$

d) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

e) Hvis $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$,
så er $p(A) = p(\omega_1) + \dots + p(\omega_n)$

Uniform sannsynlighet: når alle utfall er like sannsynlige

$$p(\omega_i) = \frac{1}{\text{ant. element i } S}$$

$$p(A) = \frac{\text{antall element i } A}{\text{antall element i } S} = \frac{\text{"gunstige"}}{\text{"mulige"}}$$

Kombinatorikk: $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1$ $\quad 0! = 1$

Kalk: $\boxed{nCr} \longrightarrow \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

binomialkoeff.

Newton's binomialformel:

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Eks: $(a+b)^3 = \underset{\binom{3}{0}}{a^3} + \underset{\binom{3}{1}}{3a^2b} + \underset{\binom{3}{2}}{3ab^2} + \underset{\binom{3}{3}}{b^3}$

Pascal's trekant:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Urnemodell: En urne med n kuler: 1 2 ... n

Vi trekker r kuler

Antall måter å trekke disse på:

	ordnet	uordnet
med tilbakelegging	$\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{r} = n^r$	$\binom{n+r-1}{r}$
uten tilbakelegging	$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r}$ $= \dfrac{n!}{(n-r)!} \longleftarrow$ På kalk: $\boxed{nPr}$	$\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ $= \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \binom{n}{r} \longleftarrow$ På kalk: $\boxed{nCr}$

Opps 9e):

Ett par: "Gunstige" $= 13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3$

$= 13 \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{2 \cdot 1}} \cdot \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot 10}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} \cdot 4^3$

$= 13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 4^3 = \underline{1.098.240}$

"Mulige" $= \binom{52}{5} = \underline{2.598.960}$

Opps. 10: Sannsynligheten for at minst 2 (av n) har bursdag samme dag: $p(A)$

$p(A) = 1 - p(A^c)$

n=2: $p(A^c) = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} = \frac{\cancel{365} \cdot 364}{\cancel{365} \cdot 365}$

$\Rightarrow p(A) = 1 - \frac{364}{365} = 1/365$

n=100: $p(A^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 266}{365^{100}} \cdot \frac{265!}{265!} = \frac{365!}{365^{100} \cdot 265!}$

$= \binom{365}{100} \cdot \frac{100!}{365^{100}} \approx 0{,}0000003$

$\frac{365!}{100!\,265!}$

"

$\binom{365}{265}$

$p(A) = 1 - p(A^c)$

$= \underline{0{,}9999997}$

① Betinget sannsynlighet

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(når $P(B) \neq 0$)

Sannsynligheten for A, gitt at B inntreffer

Eks: Vi kaster en rød og en blå terning

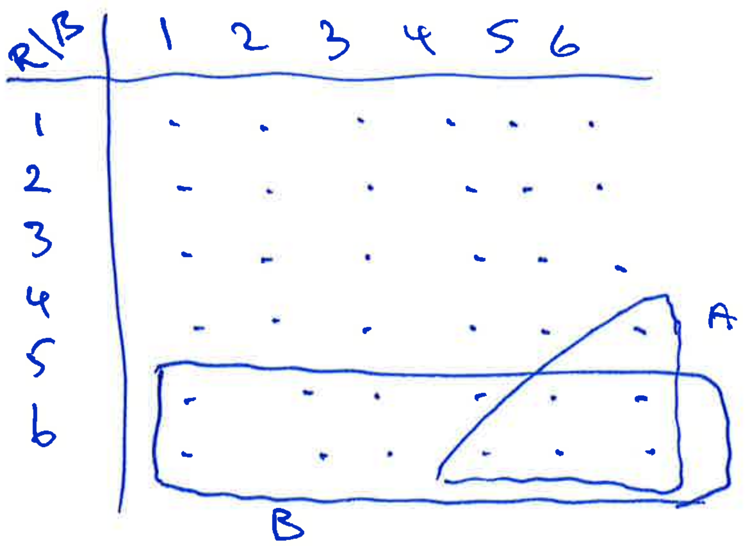
A: summen er minst 10

B: rød terning viser 5 eller 6

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{12}{36} = 1/3$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/36}{12/36} = \underline{\underline{5/12}}$$

$$P(B|A) = \underline{\underline{5/6}}$$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1190/

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \implies p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \qquad p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

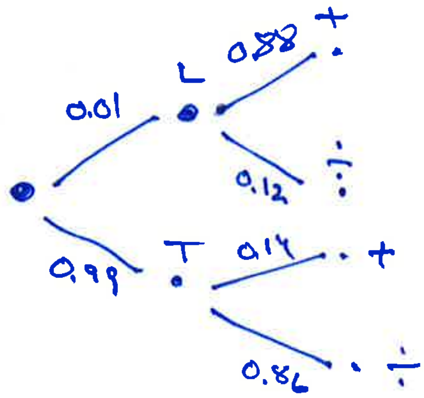
Eks: Løgndetektor

L = Løgn

T = Snakker sant

+ : positiv utslag (løgn)

÷ : negativt utslag



(undetected)

(false positive)

Anta:

$p(L) = 0.01$

$p(T) = 0.99$

$p(+|L) = 0.88$

$p(÷|L) = 0.12$

$p(+|T) = 0.14$

$p(÷|T) = 0.86$

$$p(L \cap +) = 0.01 \cdot 0.88$$
$$= p(L) \cdot p(+|L)$$

Total sannsynlighet:

$$p(A) = p(A|B)\cdot p(B) + p(A|B^c)\cdot p(B^c)$$
$$= p(A\cap B) + p(A\cap B^c)$$

Mer generelt:

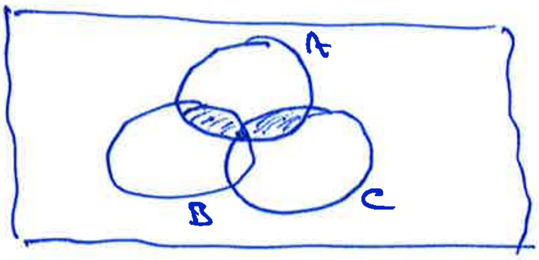
Anta at $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r = S$ er en disjunkt union (dvs at hvert utfall i S er i én, og bare én, av hendelsene $B_1, B_2, \ldots, B_r$).

Da har vi:

$$\boxed{p(A) = p(A|B_1)\cdot p(B_1) + p(A|B_2)\cdot p(B_2) + \ldots + p(A|B_r)\cdot p(B_r)}$$

Distributiv lov: for mengder

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$



$$A\cap(B\cup B^c) = A$$
$$= (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$$
$$\Rightarrow p(A\cap B) + p(A\cap B^c) = p(A)$$

Bayes' lov:

$$\boxed{p(B_i|A) = \frac{p(A|B_i)\cdot p(B_i)}{p(A)}}$$

Bruksområde:

Vi kjenner
$p(A|B_1), p(A|B_2), \ldots, p(A|B_r)$
$p(B_1), p(B_2), \ldots, p(B_r)$
når $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_r = S$ er disjunkt union

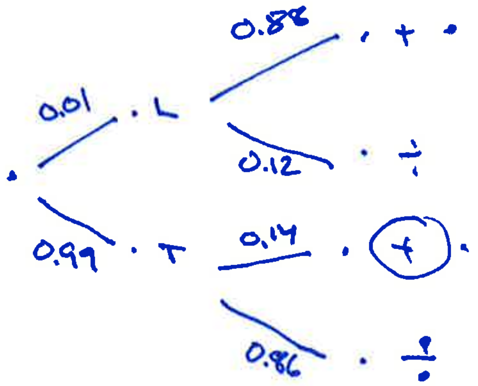
Vil vite: $\boxed{p(B_i|A)}$

Bevis:

$$p(B_i|A) = \frac{p(B_i\cap A)}{p(A)}$$

Vi regner ut $p(A)$ v.h.a. total sannsynlighet.

Eks: Løgndetektor



$p(L) = 0.01$
$p(T) = 0.99$

$p(+|L) = 0.88$
$p(\div|L) = 0.12$

$p(+|T) = 0.14$
$p(\div|T) = 0.86$

Bayes' lov:

$$p(T|+) = \frac{p(+|T)\cdot p(T)}{p(+)} \leftarrow \frac{p(+\cap T)}{p(+)}$$

$B_1 = L$
$B_2 = T$

$$= \frac{p(+|T)\cdot p(T)}{p(+|L)\cdot p(L) + p(+|T)\cdot p(T)}$$

$$= \frac{0.99\cdot 0.14}{0.88\cdot 0.01 + 0.99\cdot 0.14}$$

$$\simeq \underline{\underline{94\%}}$$

Eks: B_1: doper seg nå

B_2: har dopet seg tidligere (men ikke nå)

B_3: har aldri dopet seg

A: positiv doptest

Anta:

$p(B_1) = 0.02$

$p(B_2) = 0.14$

$p(B_3) = 0.84$

$p(A|B_1) = 0.80$

$p(A|B_2) = 0.06$

$p(A|B_3) = 0.03$

$p(B_3|A) \leftarrow$ sannsynlighet for positiv doptest om man aldri har dopet seg

Total sannsynlighet:

$$p(A) = p(A|B_1)\cdot p(B_1) + p(A|B_2)\cdot p(B_2) + p(A|B_3)\cdot p(B_3)$$
$$= 0.80\cdot 0.02 + 0.06\cdot 0.14 + 0.03\cdot 0.84$$
$$= 0.016 + 0.0084 + 0.0252$$
$$= \underline{0.0496}$$

Bayes' lov:

$$p(B_3|A) = \frac{p(A|B_3)\cdot p(B_3)}{p(A)} = \frac{0.03\cdot 0.84}{0.0496}$$

$$= \frac{0.0252}{0.0496} = \frac{63}{124} \simeq \underline{\underline{50.8\%}}$$

2 Uavhengige hendelser

Defn: To hendelser A og B er uavhengige hvis $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Husk: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{A og B} \\ \text{uavhengige}}}{=} \dfrac{P(A)\cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$

Altså: Hvis A og B er uavhengige, så er $\boxed{P(A|B) = P(A)}$
(og hvis $P(A|B) = P(A)$, så er A og B uavhengige)

Eks: U: kaster en rød og blå terning
A: rød terning viser 5 eller 6
B: Summen er minst 10

$P(A \cap B) = \dfrac{5}{36}$ $\quad P(A) = 2/6 \quad P(B) = \dfrac{6}{36}$

A og B er ikke uavhengige $\rightarrow$ $P(A \cap B) \neq P(A)\cdot P(B) = \dfrac{2}{\cancel{6}}\cdot\dfrac{\cancel{6}}{36} = \dfrac{1}{18} = \dfrac{2}{36}$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{5/36}{6/36} = 5/6 = 30/36$

$P(A) = 12/36$

$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{5/36}{2/6} = \dfrac{5}{12}$ $\quad P(B) = \dfrac{6}{36} = 2/12$

Utvidet definisjon:

A, B, C er uavhengige (gjensidig) $\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B) \\ p(A\cap C) = p(A)\cdot p(C) \\ p(B\cap C) = p(B)\cdot p(C) \\ p(A\cap B\cap C) = p(A)\cdot p(B)\cdot p(C) \end{cases}$$

de Morgan's lov: $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

$$p(A\cup B) = 1 - p((A\cup B)^c)$$
$$= 1 - p(A^c \cap B^c)$$
$$= 1 - p(A^c)\cdot p(B^c)$$

anta A og B uavhengige

Eks: Sannsynlighet for skade i et utforrenn: 0.01
Antar at A_i: skade i utforrenn i er gjensidig uavhengige hendelser.

Sannsynlighet for skade om man deltar i 140 renn:

$$p(A_1\cup A_2 \cup \dots \cup A_{140}) = 1 - p((A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_{140})^c)$$
$$= 1 - p(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{140}^c)$$
$$= 1 - p(A_1^c)\cdot p(A_2^c)\cdots p(A_{140}^c)$$
$$= 1 - (1-0.01)^{140} = 1 - 0.99^{140} \simeq 75.5\%$$