Eksamen	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	22. mai 2026 kl 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 15 deloppgaver med lik vekt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.
Vi ser på matrisen A gitt nedenfor, og kaller kolonnevektorene til A for $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

(a) Regn ut lineær-kombinasjonen $3\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_5$ og indreproduktet $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_3$.
(b) Løs det lineære likningssystemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Hvor mange frihetsgrader er det?

Oppgave 2.
Regn ut disse integralene:

a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{6-x-x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int 4x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3.
Vi ser på et marked der etterspørselskurven og tilbudskurven er gitt ved likningene

$$p = \frac{3300}{q+5} \quad \text{og} \quad p = q + 10$$

der p er pris og q er kvantum. Bestem konsumentoverskuddet, definert som den økonomiske gevinsten forbrukere oppnår ved å betale en lavere pris enn deres maksimale betalingsvillighet for en vare eller tjeneste.

Oppgave 4.
Vi ser på det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med parameter t gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 4 \\ 1 & t & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 16 \end{pmatrix}$$

(a) Regn ut determinanten til A.
(b) Bestem alle verdier av t slik at det lineære systemet har akkurat én løsning.
(c) Bestem t slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger. Finn alle løsningene i disse tilfellene.

Oppgave 5.
Vi ser på funksjonen f gitt ved $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 1$ og området D i xy-planet gitt ved ulikhetene $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 4y \leq 12$.

(a) Vis området D på figur, og avgjør om D er kompakt.
(b) Tegn inn nivåkurvene $f(x,y) = 0$ og $f(x,y) = 12$ på figuren fra (a).
(c) Løs optimeringsproblemet $\max / \min f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 1$ når $x,y \geq 0,\ 3x + 4y \leq 12$.

Oppgave 6.
Vi ser på Lagrange-problemet $\max / \min f(x,y) = x - y$ når $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 3$.

(a) Skriv ned de tre Lagrange-betingelsene. Er det tillatte punkter med degenerert bibetingelse?
(b) Løs Lagrangeproblemet, og finn eventuelle maksimums- og minimumsverdier.

Formelark

Finansmatematikk

Geometriske rekker.
En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier.
Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal.
Arealet til området begrenset av $a \le x \le b$ og $f(x) \le y \le g(x)$ er

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) \,\mathrm{d}x$$

Lineær algebra

Cramers regel.
Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

Funksjoner i to variabler

Andrederivert-testen.
Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum når $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum når $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt når $AC - B^2 < 0$

der $H(f)(x^*, y^*) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$.

Nivåkurver.
Nivåkurven $f(x,y) = c$ har derivert $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Lagranges multiplikatormetode.
Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max / \min f(x,y) \text{ når } g(x,y) = a$$

er gitt ved

$$\mathcal{L}'_x = 0,\ \mathcal{L}'_y = 0,\ g(x,y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0,\ g'_y = 0$$