Løsning	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	23. mai 2025 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Vi regner ut

$$3\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_5 = 3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}3\\1\\11\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\11\end{pmatrix} = 3 + 2 + 22 = 27$$

(b) Vi skriver ned den utvidede matrisen til det lineære systemet og gjør elementære radoperasjoner til vi finner en trappeform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 11 & 1 & 8 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Siden den siste kolonnen er en null-kolonne, og vi har pivotposisjoner i kolonne 1, 2 og 4 er x_3 og x_5 fri, og det er to frihetsgrader og uendelig mange løsninger. Vi bruker parametrene $x_3 = s$ og $x_5 = t$, og baklengs substitusjon: Fra tredje likning får vi $x_4 - 4t = 0$, eller $x_4 = 4t$. Fra andre likning finner vi $-5x_2 + s - 3(4t) - 3t = 0$, eller $x_2 = s/5 - 3t$. Den første likningen gir $x_1 + 3(s/5 - 3t) + s + 2(4t) + 4t = 0$, eller $x_1 = -8s/5 - 3t$. Løsningene til det lineære systemet kan dermed skrives

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8s/5 - 3t \\ s/5 - 3t \\ s \\ 4t \\ t \end{pmatrix} = \frac{s}{5}\begin{pmatrix}-8\\1\\5\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\\4\\1\end{pmatrix}$$

der s,t er parametre som svarer til frie variabler.

(c) Vi vet at en kvadratisk matrise B er invertibel hvis og bare hvis $|B| \neq 0$, og dette er det samme som at hver kolonne inneholder en pivotposisjon. Tar vi bort kolonne 3 og 5 får vi derfor en invertibel matrise B. Det er også mulig å ta bort kolonne 3 og 4; da vil tallet 4 i siste rad og siste kolonne bli pivot istedet for tallet 1 vi fant for A ovenfor (siden tallet 1 foran 4 blir borte). Det er nok å finne en av disse mulighetene for å få full score.

Oppgave 2.

(a) Vi skriver $2/x^3 = 2x^{-3}$ og bruker potensregelen:

$$\int_1^2 \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[2\,\frac{x^{-2}}{(-2)}\right]_1^2 = \left[\frac{-1}{x^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

(b) Faktoriseringen $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ av nevner kan brukes til å finne en delbrøksoppspaltning:

$$\frac{2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \quad 2 = A(x-3) + B(x-2)$$

Dette gir $(A+B)x + (-3A - 2B) = 2$, og dermed $A + B = 0$ og $-3A - 2B = 2$. Vi finner at $B = -A$ (fra første likning), og dermed blir $-3A - 2(-A) = -A = 2$, det vil si $A = -2$, $B = 2$. Dette gir integralet

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{-2}{x-2} + \frac{2}{x-3}\,\mathrm{d}x = [-2\ln|x-2| + 2\ln|x-3|]_{-1}^1$$
$$= (-2\ln 1 + 2\ln 2) - (-2\ln 3 + 2\ln 4) = 2\ln 3 - 2\ln 2 \approx 0.81$$

(c) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = e^{1-x}$ og $v = x$, og dermed $u = -e^{1-x}$ og $v' = 1$. Husk at kjernen $u = 1 - x$ har derivert $u' = -1$. Det ubestemte integralet blir da

$$\int xe^{1-x}\,\mathrm{d}x = x(-e^{1-x}) - \int 1 \cdot (-e^{1-x})\,\mathrm{d}x = -xe^{1-x} - e^{1-x} + C$$

Det bestemte integralet har dermed verdien

$$\int_0^1 xe^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{1-x} - e^{1-x}\right]_0^1 = (-1-1) - (0-e) = e - 2 \approx 0.72$$

(d) Vi bruker substitusjonen $u = e^x + 1$, med $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$, og får at det ubestemte integralet blir

$$\int \frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x \cdot e}{u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{e^x} = \int e \cdot \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = e\ln|u| + C = e\ln(e^x+1) + C$$

Dette gir det bestemte integralet

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = [e\ln(e^x+1)]_{-1}^1 = e\ln(e+1) - e\ln(1/e+1) = e\ln\frac{e+1}{1/e+1}$$

Utvider vi den siste brøken med e oppe og nede, kan vi forenkle dette uttrykket:

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = e\ln\frac{(e+1)e}{(1/e+1)e} = e\ln\frac{e(e+1)}{1+e} = e\ln(e) = e \approx 2.72$$

Oppgave 3.

(a) Likningen $100x + 125y + 284z = 1.500.000$ er budsjettbetingelsen. Den betyr at kostnaden for å kjøpe porteføljen av aksjer (venstre side) er lik den tilgjengelige kapitalen (høyre side).

(b) Vi finner fram til gevinst per aksjer i hvert selskap for hvert av de tre scenariene, og finner uttrykk for (R_1,R_2,R_3). I tillegg skriver vi $C = 1.500.000$ for kapitalen vi investerer, og tar med budsjettbetingelsen $100x + 125y + 284z = C$. Til slutt setter vi $R_1 = R_2 = R_3 = R$ siden avkastningen skal være den samme i alle scenarier. Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet og bruker elementære radoperasjoner for å få denne matrisen på trappeform:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R \\ 50 & -75 & 120 & R \\ 20 & 15 & 20 & R \\ 100 & 125 & 284 & C \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R \\ 0 & -25 & 180 & 3R \\ 0 & 35 & -100 & 9R/5 \\ 0 & 225 & -316 & C+4R \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R \\ 0 & -25 & 180 & 3R \\ 0 & 0 & -352 & 6R \\ 0 & 0 & -1936 & C+31R \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|l} -25 & 25 & -150 & R \\ 0 & -25 & 180 & 3R \\ 0 & 0 & -352 & 6R \\ 0 & 0 & 0 & C-2R \end{array}\right)$$

Vi ser at det lineære systemet har løsninger om $C - 2R = 0$, eller $R = 1.500.000/2 = 750.000$. Konklusjonen er at det er mulig å finne en portfølje med samme avkastning i alle tre scenarier, og avkastning blir 750.000 kr for denne porteføljen.

Oppgave 4.

(a) De stasjonære punktene til funksjonen $f(x,y) = 4x^2 - 8x + y^2 - 2y$ finner vi ved å regne ut de partiellderiverte og løse førsteordensbetingelsene:

$$f'_x = 8x - 8 = 0$$
$$f'_y = 2y - 2 = 0$$

Dette gir $x = 1$ og $y = 1$. Altså er $(x,y) = (1,1)$ eneste stasjonære punkt for f. Vi finner Hesse-matrisen i dette punktet for å klassifisere det:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Siden determinanten til denne matrisen er $8 \cdot 2 = 16 > 0$ og $8,2 > 0$, er det stasjonære punktet $(1,1)$ et lokalt minimum for f ved andrederivert-testen.

(b) For å undersøke om det lokale minimumspunktet (1,1) er et globalt minimum for f, finner vi nivåkurvene $f(x,y) = c$ ved å fullføre kvadratene:

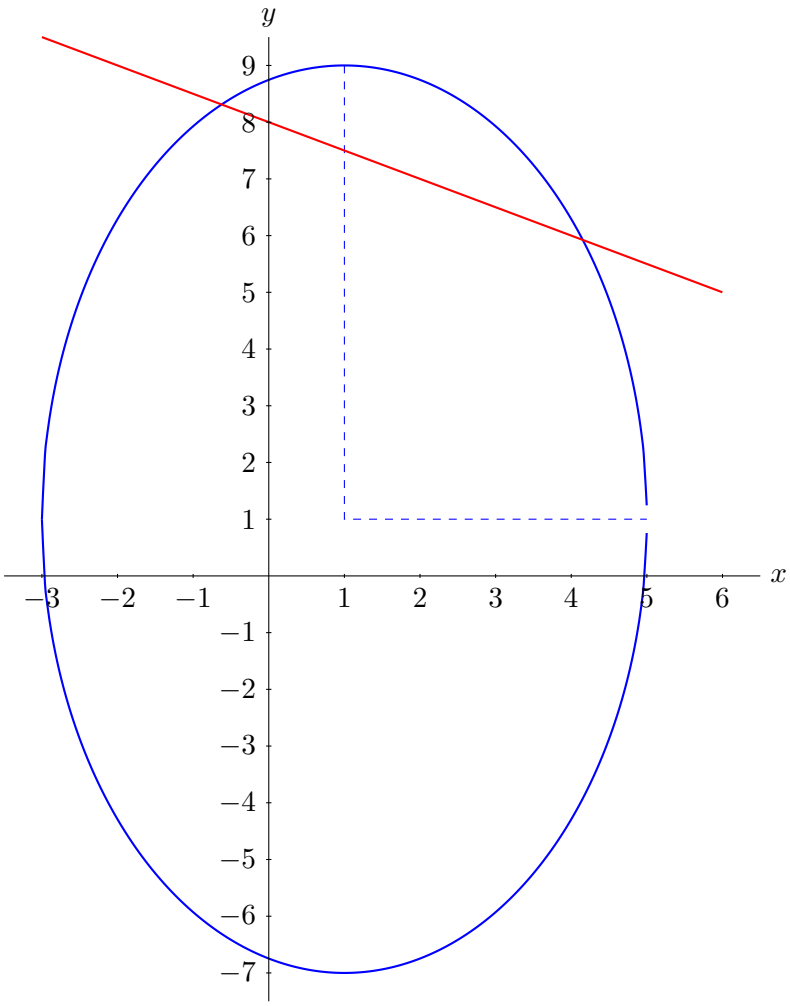
$$f(x,y) = 4(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) = c \;\Rightarrow\; 4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = c + 5$$

Nivåkurven er derfor ellipsen $4(x-1)^2+(y-1)^2 = c+5$ når $c > -5$, ett punkt (1,1) når $c = -5$, og ingen punkter når $c < -5$. Vi konkluderer med at f har en minimumsverdi $f_{\min} = -5$ i minimumspunktet $(x,y) = (1,1)$. Fra (a) vet vi at f ikke har noen lokale maksimumspunkter, dermed har f ingen global maksimumsverdi.

(c) Nivåkurven $f(x,y) = 59$ er ellipsen $4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 59 + 5 = 64$, som kan skrives

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

Den har sentrum (1,1) og har halvakser $a = 4$ og $b = 8$. Den rette linjen $x + 2y = 16$ går gjennom punktene (16,0) og (0,8). Vi bruker denne geometriske beskrivelsen til å tegne figur:



(d) De tillatte punktene i problemet er punktene på den røde linjen i figuren, og vi ser fra figuren at det er to skjæringspunkter med $f(x,y) = 59$, det vil si to tillatte punkter med verdi $f = 59$. Fra beskrivelsen av nivåkurven til f gitt ovenfor, ser vi at større ellipser gir større f-verdier siden halvaksene vokser når c vokser. Hvis vi øker c vil vi få skjæringspunkter lenger ute på den røde linjen, og det betyr at problemet ikke har maksium. Hvis vi gjør c mindre, finnes det én bestemt c^* som gir en ellipse som akkurat tangerer den røde linjen, og $f_{min} = c^* < 59$ siden dette er en mindre ellipse enn den vist i figuren.

Oppgave 5.

(a) Vi bruker Lagranges metode med $\mathcal{L} = x^2 - 3xy + 4y^2 - \lambda(x + 2y - 16)$ for å finne kandidatpunkter. Lagrange-betingelsene er

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 2x - 3y - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= -3x + 8y - 2\lambda = 0 \\ x + 2y &= 16 \end{aligned}$$

Vi løser den første likningen for λ, som gir $\lambda = 2x - 3y$, og setter dette inn i andre likning for å eliminere λ:

$$-3x + 8y = 2\lambda = 2(2x - 3y) = 4x - 6y \quad \Rightarrow \quad -7x + 14y = 0$$

Vi løser likningen for x og får $x = 2y$, og setter inn i bibetingelsen:

$$x + 2y = 2y + 2y = 16 \quad \Rightarrow \quad 4y = 16$$

Dette gir $y = 4$, $x = 2y = 8$ og $\lambda = 2x - 3y = 16 - 12 = 4$. Vi får dermed ett kandidatpunkt $(x,y;\lambda) = (8,4;4)$ som oppfyller Lagrange-betingelsene.

(b) Kandidatpunktet ovenfor har $f(8,4) = 8^2 - 3(32) + 4(16) = 32$. For å undersøke om dette er maksimums- eller minimumsverdi i problemet, løser vi bibetingelsen $x + 2y = 16$ for x, som gir $x = 16 - 2y$, og setter dette inn i funksjonsuttrykket til f:

$$f(16 - 2y, y) = (16 - 2y)^2 - 3y(16 - 2y) + 4y^2 = 14y^2 - 112y + 256$$

Problemet blir dermed å finne maks/min til dette uttrykket i én variabel. Den deriverte blir $28y - 112$, og $28y - 112 = 0$ gir $y = 112/28 = 4$. Dessuten er den andrederiverte $28 > 0$, så uttrykket gir en konveks funksjon og $y = 4$ er dermed et minimumspunkt. Vi ser at $y = 4$ svarer til kandidatpunktet vi fant i (a). Dermed har problemet minimumsverdi $f_{\min} = 32$ i punktet $(x,y) = (8,4)$ med $\lambda = 4$. Problemet har ikke noe maksimumsverdi siden det ikke er flere kandidatpunkter.