Løsningsforslag	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	19. desember 2024 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

a) Vi bruker kofaktorutvikling langs første rad for å regne ut determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - t) - 2(t^2 - 1) + 1(t^2 - 0) = -t^2 - t + 2$$

Vi faktoriser uttrykket og får $|A| = -(t-1)(t+2)$.

b) Når $t = -1$ er $\det(A) = -(-1)^2 - (-1) + 2 = 2 \neq 0$, dermed har A en invers matrise gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$$

der C_{ij} er kofaktoren til A i posisjon $(i\,,j)$. Med $t = -1$ er den inverse matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Vi multipliserer likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med A^{-1} fra venstre. Det gir

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+3+2 \\ 0+(-6)+(-2) \\ 2+9+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2.

a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, og bruker elementære radoperasjoner:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 10 & -10 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, og vi har markert pivotposisjonene som blå. Det er dermed uendelig mange løsninger, med w fri når vi skriver $\mathbf{x} = (x\,,y\,,z\,,w)$ for de ukjente. Vi finner løsningene ved baklengs substitusjon: Fra siste likning finner vi $8z - 8w = 8$, eller $z = 1 + w$. Neste likning gir $-y - 3z + w = -1$, eller $y = 1 - 3z + w = 1 - 3(1+w) + w = 1 - 3 - 3w + w = -2 - 2w$. Første likning gir $x + 2y + 2z - w = 0$, eller $x = w - 2y - 2z = w - 2(-2-2w) - 2(1+w) = w + 4 + 4w - 2 - 2w = 2 + 3w$. Løsningene til det lineære systemet kan dermed skrives

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2+3w \\ -2-2w \\ 1+w \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der w er en fri variabel.

b) Fra (a) har vi at

$$(2+3w)\mathbf{v}_1 + (-2-2w)\mathbf{v}_2 + (1+w)\mathbf{v}_3 + w\mathbf{v}_4 = \mathbf{b}$$

for alle tall w. Hvis vi lar $-2 - 2w = 0$, altså $w = -1$, får vi at

$$(2 + 3 \cdot (-1))\mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + (1 + (-1))\mathbf{v}_3 + (-1)\mathbf{v}_4 = \mathbf{b}.$$

Altså er

$$-\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{b}$$

en måte å skrive $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ på. Alternativt kan vi løse vektorlikningen $x_1\mathbf{v}_1 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{b}$ ved å skrive den som et lineært system og bruke Gauss-eliminasjon.

Oppgave 3.

a) Vi bruker delvis integrasjon der vi deriverer $3x$ og integrerer e^x. Dermed får vi

$$\int 3xe^x \, \mathrm{d}x = 3xe^x - \int 3e^x \, \mathrm{d}x = 3xe^x - 3e^x + C$$

b) Vi faktoriserer nevneren i integranden: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Vi bruker deretter delbrøksoppspaltning til å forenkle uttrykket som skal integreres. Fra faktoriseringen av nevneren, kan vi skrive integraden på følgende måte:

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{3x+1}{(x-3)(x+2)}$$

Vi vil finne tall A og B slik at

$$\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \quad \Rightarrow \quad 3x+1 = A(x+2) + B(x-3) = (A+B)x + (2A-3B)$$

Dette gir $A + B = 3$ og $2A - 3B = 1$ ved å sammenligne koeffisientene foran hvert ledd på venstre og høyre side. Vi får $A = 3 - B$ og dermed $2(3-B) - 3B = 1$ eller $-5B = -5$, altså $B = 1$. Dette gir $A = 3 - 1 = 2$. Integralet blir da

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2} \right) \mathrm{d}x = 2 \ln|x-3| + \ln|x+2| + C$$

c) Vi bruker substitusjonen $u = \sqrt{x} + 3$, med $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$. Fra substitusjonen får vi $\sqrt{x} = u - 3$. Dermed kan vi skrive $\mathrm{d}x = 2(u-3)\,\mathrm{d}u$. Vi beregner det ubestemte integralet

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{\sqrt{x}+3} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{5}{u} \cdot 2(u-3) \, \mathrm{d}u = \int 10 - \frac{30}{u} \, \mathrm{d}u = 10u - 30 \ln|u| + C \\ &= 10(\sqrt{x}+3) - 30 \ln(\sqrt{x}+3) + C \end{aligned}$$

Ved å sette inn integrasjonsgrensene får vi

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} \, \mathrm{d}x &= 10(\sqrt{4}+3) - 30 \ln(\sqrt{4}+3) - \left[10(\sqrt{1}+3) - 30 \ln(\sqrt{1}+3) \right] = 50 - 30\ln(5) - [40 - 30\ln(4)] \\ &= 10 - 30\,[\ln(5) - \ln(4)] \end{aligned}$$

d) Samlet nåverdi for leie i løpet av de første 6 årene er gitt ved:

$$\int_0^6 I(x) e^{-rx} \, \mathrm{d}x = \int_0^6 300 \cdot e^{0{,}05x} \cdot e^{-0{,}08x} \, \mathrm{d}x = 300 \int_0^6 e^{0{,}05 - 0{,}08x} \, \mathrm{d}x = 300 \int_0^6 e^{-0{,}03x} \, \mathrm{d}x$$

Ved å antiderivere, finner vi at

$$300 \int_0^6 e^{-0{,}03x} \, \mathrm{d}x = \frac{300}{-0{,}03} \left[e^{-0{,}03x} \right]_{x=0}^{x=6} = \frac{300}{-0{,}03} \left(e^{-0{,}03 \cdot 6} - e^0 \right) = 10\,000 \left(1 - e^{-0{,}18} \right) = 1647{,}30$$

Oppgave 4.

a) De partiellderiverte til $f(x, y) = (x-3)^2 + 4y^2$ er $f'_x = 2(x-3)$ og $f'_y = 8y$. Dermed er førsteordensbetingelsene $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ gitt ved

$$\begin{aligned} f'_x &= 2(x-3) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 3, \\ f'_y &= 8y = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = 0. \end{aligned}$$

Dermed har vi kun ett stasjonært punkt for f:

$$(x, y) = (3, 0).$$

Hessematrisen til f i et generelt punkt er gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Det stasjonære punktet er $(x, y) = (3, 0)$. I dette tilfellet er Hessematrisen uavhengig av punktet, så

$$H(f)(3, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $\det(H(f)(3\,,0)) = 2\cdot 8 - 0\cdot 0 > 0$ og $\operatorname{tr} H(f)(3\,,0) = 2+8 > 0$. Dermed er $(3\,,0)$ et lokalt minimum for f.

b) Nivåkurven til $f(x\,,\,y)$ med nivå $c = 16$ er løsningene til likningen $f(x\,,\,y) = (x-3)^2 + 4y^2 = 16$. Den kan omskrives til

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Dette gjenkjenner vi som standardlikningen til en ellipse med sentrum i punktet $(3\,,0)$ med horisontal halvakse $a = 4$ og vertikal halvakse $b = 2$.

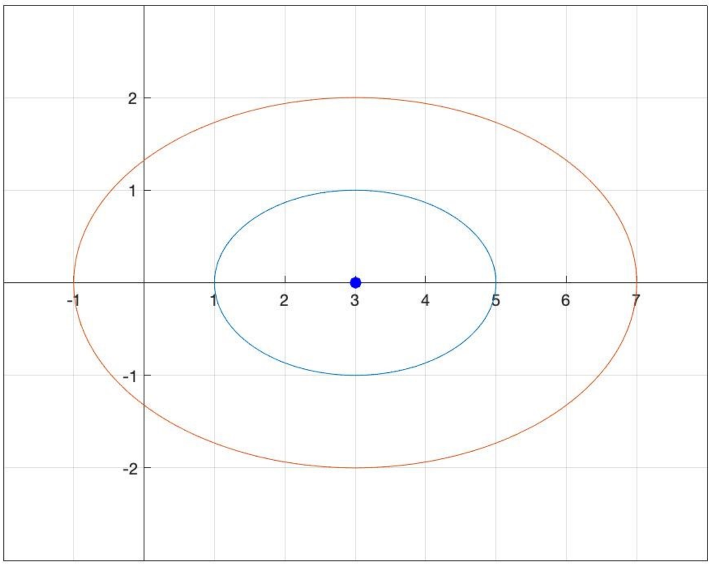
Altså er nivåkurven på nivå $c = 16$ en ellipse med sentrum $(3\,,0)$, horisontal halvakse 4 og vertikal halvakse 2. Vi kan gjøre tilsvarende omskriving for $c = 4$:

$$(x-3)^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

Dette gjenkjenner vi som standardlikningen til en ellipse med sentrum i $(3\,,0)$, horisontal halvakse 2 og vertikal halvakse 1. Dette er en mindre ellipse enn den på nivå $c = 16$.

For $c = 0$ får vi $(x-3)^2 + 4y^2 = 0$. Siden $(x-3)^2 \geq 0$ og $4y^2 \geq 0$ for alle $(x\,,\,y)$, betyr dette at vi må ha $x - 3 = 0$, altså $x = 3$ og $y = 0$. Dermed er nivåkurven for $c = 0$ bare punktet $(3\,,0)$. Dette er sentrum i ellipsene over. I Figur 1 er nivåkurvene tegnet i samme koordinatsystem.



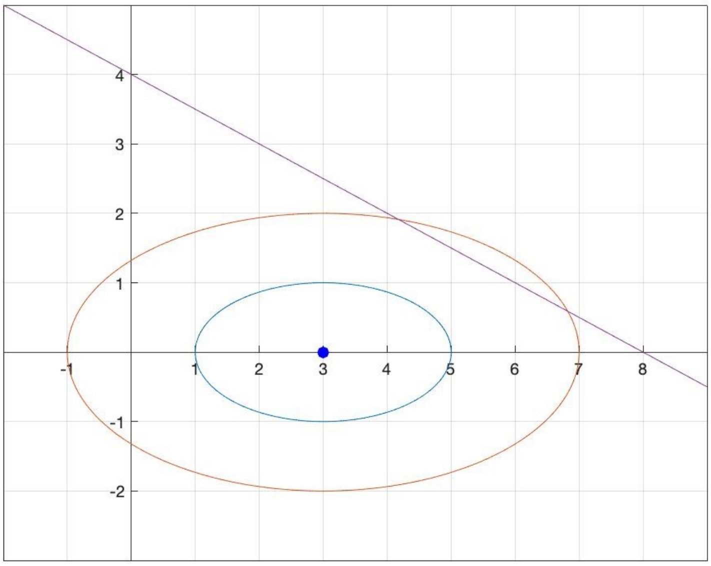
FIGUR 1. Nivåkurver for f.

Nivåkurven til hvert nivå $c > 0$ for funksjonen f er en ellipse i xy-planet med samme sentrum $(x\,,\,y) = (3\,,\,0)$. Jo større ellipse, jo høyere funksjonsverdi. Siden funksjonen er definert for alle $(x\,,\,y)$ betyr dette at det finnes ikke noe maksimum for f: Vi kan alltid tegne større og større nivåkurve-ellipser som svarer til høyere og høyere funksjonsverdier.

Derimot ser vi at

$$(x-3)^2 + 4y^2 = c$$

ikke har noen løsninger for $c < 0$ fordi venstresiden er en sum av to kvadrattall og altså er større eller lik 0. Dermed får vi at f har et globalt minimumspunkt i $(x\,,\,y) = (3\,,0)$ med nivå $c = 0 = f(3\,,0)$. Merk at dette minimumspunktet er det samme som det vi fant i (a).



FIGUR 2. Nivåkurver for f med begrensningen.

c) Begrensningen $0{,}5x + y = 4$ kan skrives som $y = 4 - 0{,}5x$. I Figur 2 er grafen til denne funksjonen tegnet i samme koordinatsystem som nivåkurvene. Begrensningen betyr at definisjonsomerådet til $f(x\,,\,y)$ er punktene på grafen til $y = 4 - 0{,}5x$. Fra figuren ser vi at optimeringsproblemet med begrensningen fortsatt ikke har noe maksimum: Vi kan komme oss til en vilkårlig stor nivåkurve-ellipse ved å gå utover på den rette linja. Derimot har optimeringsproblemet med bibetingelsen et minimum. Dette finner vi ved å tegne en nivåkurve-ellipse som tangerer den rette linja. Tangeringspunktet vil være minimumspunktet og minimumsverdien (som er nivået ved tangeringspunktet) vil være større enn 4 og mindre enn 16.

Oppgave 5.

a) Vi bruker Lagranges metode med $\mathcal{L} = x^2y^2 + 22x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 52)$ for å finne kandidatpunkter. Lagrange-betingelsene er

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 2xy^2 + 44x - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 2x^2y + 4y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 52 \end{aligned}$$

Vi har tre tilfeller:

- Dersom $x\,,\,y \neq 0$ kan vi dividere med hensyn på hhv. $2x$ og $2y$, og dermed løse de to første likningene for λ. I så fall får vi:

  $$\lambda = y^2 + 22 = x^2 + 2$$

  Altså er $x^2 = y^2 + 20$. Vi setter dette inn i bibetingelsen, og får $x^2 + y^2 = y^2 + 20 + y^2 = 2y^2 + 20 = 52$, så $y^2 = 16 \implies y = \pm 4$. Altså er $x^2 = y^2 + 20 = 16 + 20 = 36$, så $x = \pm 6$. Vi regner ut tilhørende λ fra f.eks. $\lambda = y^2 + 22 = 16 + 22 = 38$. Dette gir fire kandidatpunkter:

  $$(6\,,4\,;\,38)\,,(6\,,\,-4\,;\,38)\,,(-6\,,4\,;\,38)\,,(-6\,,\,-4\,;\,38).$$

  De tilhørende funksjonsverdiene er

  $$f(6\,,4) = f(6\,,-4) = f(-6\,,4) = f(-6\,,-4) = 36 \cdot 16 + 22 \cdot 36 + 2 \cdot 16 = 1400.$$

- Hvis $x = 0$, holder første likning automatisk. Fra andre likning får vi at $4y - 2\lambda y = 0$, altså $y(2 - \lambda) = 0$. For at dette skal holde må $y = 0$ eller $\lambda = 2$ (eller begge). Hvis $y = 0$, kan ikke bibetingelsen holde, siden vi da får $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 \neq 52$. Derimot er $\lambda = 2$ mulig.

I så fall finner vi y ved å løse $0^2 + y^2 = 52$, som gir $y = \pm\sqrt{52}$. Kandidatpunktet blir altså $(x\,, y\,; \lambda) = (0\,, \pm\sqrt{52}\,; 2)$. Tilhørende funksjonsverdi er $f(0\,, \pm\sqrt{52}) = 2 \cdot 52 = 104$.

- Hvis $y = 0$ holder andre likning automatisk. Tilsvarende argument som over, men for første likning, gir at eneste mulighet er $\lambda = 22$ med tilhørende $x = \pm\sqrt{52}$. Kandidatpunktet blir altså $(x\,, y\,; \lambda) = (\pm\sqrt{52}\,, 0\,; 22)$. Tilhørende funksjonsverdi er $f(\pm\sqrt{52}\,, 0) = 1144$.

b) Ekstremverdisetningen sier at enhver kontinuerlig funksjon definert over en lukket og begrenset mengde har et (globalt) maksimum og et (globalt) minimum.

Ekstremverdisetningen kan brukes på Lagrangeproblemet, fordi $f(x, y)$ er en kontinuerlig funksjon, og mengden av tillatte punkter er lukket og begrenset: Den er lukket fordi den er definert ved en likhet (inneholder randpunktene sine). Mengden er begrenset fordi $x^2 + y^2 = 52$ er en sirkel med sentrum origo og radius $\sqrt{52}$.

c) Et punkt har degenerert bibetingelse hvis $g'_x = g'_y = 0$, hvor $g(x\,, y) = x^2 + y^2$. Dette gir

$$g'_x = 2x = 0,\; g'_y = 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$

Men punktet $(x\,, y) = (0\,, 0)$ er ikke tillatt, siden det ikke passer i bibetingelsen; $g(0\,, 0) = 0 \neq 52$. Vi konkluderer at det ikke finnes tillatte punkter med degenerert bibetingelse i dette problemet.

Fra Ekstremverdisetningen følger det at Lagrangeproblemet har et maksimum og et minimum, og det må være et av kandidatpunktene vi har funnet, siden det ikke er tillatte punkter med degenerert bibetingelse. Ved å finne største og minste funksjonsverdi blant kandidatpunktene i (b), følger det at maksimumsverdien er $f_{\text{max}} = 1400$ i punktene

$$(x\,, y) = (6\,, 4), (6\,, -4), (-6\,, 4), (-6\,, -4)$$

med $\lambda = 38$. Tilsvarende er minimumsverdien $f_{\text{min}} = 104$ i punktene $(x\,, y) = (0, \pm\sqrt{52})$ med $\lambda = 22$.