Eksamen	MET 1180 Matematikk for siviløkonomer
Dato	27. mai 2024 kl. 0900 - 1400

Eksamensoppgaven består av 15 deloppgaver med lik vekt. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1.
La matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$ være gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Regn ut determinanten til A, og faktoriser uttrykket.
(b) Finn A^{-1} når $a = 2$.
(c) Løs likningen $A^{-1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $\mathbf{x}$ når $a = 2$.

Oppgave 2.
Vi ser på matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & -9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

og kaller kolonnevektorene til A for $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$.

(a) Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(b) Skriv $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ hvis det er mulig.

Oppgave 3.
Regn ut disse integralene:

a) $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$

La $I(x) = 200 \cdot 1{,}04^x$ være kontantstrømmen etter x år ved utleie av en eiendom. Vi regner dette som en kontinuerlig kontantstrøm, og bruker kontinuerlig diskontering med diskonteringsrente $r = 6\%$ når vi regner nåverdi.

d) Finn samlet nåverdi av leien i løpet av de første fem årene.

Oppgave 4.
Vi ser på funksjonen f gitt ved $f(x,y) = 9(x-3)^2 + 4y^2$.

(a) Finn de stasjonære punktene til f, dersom det finnes noen. Regn ut Hesse-matrisen til f og bruk denne til å klassifisere eventuelle stasjonære punkter.
(b) Tegn nivåkurver for $f(x,y)$ på nivåene $c = 0, 1, 4$ og 9. Bruk denne figuren til å forklare hvorvidt f har maksimums- og/eller minimumsverdier.
(c) Anta at vi isteden ser på optimeringsproblemet $\max / \min f(x,y)$ med begrensningen $x+y = 4$. Tegn denne begrensningen i samme koordinatsystem som nivåkurvene, og bruk figuren til å estimere eventuelle maksimums- og/eller minimumsverdier for Lagrange-problemet.

Oppgave 5.
Vi ser på Lagrange-problemet $\max / \min f(x,y) = x^2y^2 + 2x^2 + y^2$ når $x^2 + y^2 = 33$.

(a) Finn alle punkter $(x,y;\lambda)$ som oppfyller Lagrange-betingelsene.
(b) Hva sier Ekstremverdisetningen? Kan den brukes på dette Lagrange-problemet?
(c) Løs Lagrange-problemet. Husk å gi en fullstendig begrunnelse for svaret ditt.

Formelark

Finansmatematikk

Geometriske rekker.
En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier.
Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:
$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int uv' \,\mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:
$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}x = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:
$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal.
Arealet til området begrenset av $a \le x \le b$ og $f(x) \le y \le g(x)$ er

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$

Lineær algebra

Cramers regel.
Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

Funksjoner i to variabler

Andrederivert-testen.
Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum når $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum når $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt når $AC - B^2 < 0$

der $H(f)(x^*, y^*) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$.

Nivåkurver.
Nivåkurven $f(x,y) = c$ har derivert $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Lagranges multiplikatormetode.
Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max / \min f(x,y) \text{ når } g(x,y) = a$$

er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = \lambda \, \nabla g(x,y), \; g(x,y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0, \; g'_y = 0$$