Skoleeksamen (3t) MET11808 - Matematikk for siviløkonomer

5. desember 2025

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

i) Vi beregner:

$$\begin{array}{rl} \big(& x^3+11x^2+40x+50\big) : \big(x+5\big) = x^2+6x+10 \\ \underline{-x^3} & \underline{-5x^2} \\ & 6x^2+40x \\ & \underline{-6x^2-30x} \\ & 10x+50 \\ & \underline{-10x-50} \\ & 0 \end{array}$$

Restleddet er 0.

ii) Fordi $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$ ikke har noen nullpunkter, kan ikke uttrykket faktoriseres videre. Dermed er $x^3+11x^2+40x+50=\underline{\underline{(x+5)(x^2+6x+10)}}$.

Oppgave 2

i) Leser den geometriske rekken baklengs og får første ledd $a_1=\frac{20\,000}{1{,}03^{25}}$, multiplikasjonsfaktor $k=1{,}03$ og antall ledd $n=25-1=24$. Innsatt i formelen for summen til en geometrisk rekke får vi:

$$\frac{20\,000}{1{,}03^{25}}\cdot\frac{1{,}03^{24}-1}{0{,}03}=\underline{\underline{328\,845{,}48}}$$

ii) Vi har en regulær kontantstrøm med 20 000 betalt hvert år med første betaling om 2 år og siste om 25 år fra nå. Summen er nåverdien til denne kontantstrømmen hvis renten er $r=3\%$ (med første betaling lengst til venstre i summen). Nåverdien kan da være lånebeløpet hvis man betaler tilbake 20 000 hvert år som beskrevet.

Oppgave 3

i) GALT. Den deriverte funksjonen gir stigningstallene til tangentene til $f(x)$. Det ser ut til at $f'(3)\approx 0$ mens $f'(8)\approx 0{,}4$. Altså er $f'(3)<f'(8)$.

ii) GALT. $x=a$ er et stasjonært punkt hvis $f'(a)=0$. I intervallet er det to slike punkter: $x\approx 3$ og $x\approx 5{,}3$.

iii) RETT. $x=a$ er et vendepunkt hvis $f''(x)$ skifter fortegn ved $x=a$. Dette skjer der grafen endrer form fra konveks til konkav eller omvendt. I intervallet skjer dette for $x\approx 3{,}7$ (fra konkav til konveks) og for $x\approx 6{,}8$ (fra konveks til konkav).

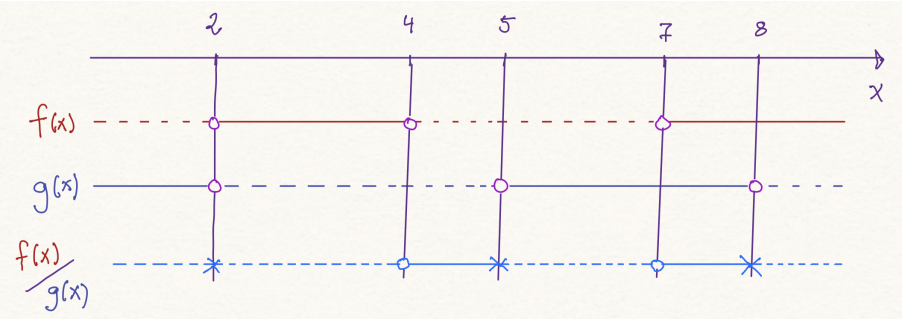
Oppgave 4

Standardformen for en hyperbelfunksjon er $f(x)=c+\frac{a}{x-b}$. Her vil $x=b$ være vertikal asymptote, så $b=30$, og $y=c$ er horisontal asymptote, dvs. $c=50$. Det gir $f(x)=50+\frac{a}{x-30}$. Fra $f(33)=48$ får vi $50+\frac{a}{33-30}=48$ som gir $a=-6$. Altså $\underline{\underline{f(x)=50-\frac{6}{x-30}}}$.

Oppgave 5

i) Legger $g(x)$ til på begge sider og får den ekvivalente ulikheten $f(x) > g(x)$. Dette skjer der grafen til $f(x)$ ligger over grafen til $g(x)$. Dette gir løsningene (tilnærmet) $2 < x < 4{,}37$ og $x > 7{,}4$.

ii) Her lager vi et fortegnsskjema:



Figur 1: Fortegnsskjema

Altså får vi løsningene (tilnærmet) $x < 2$ og $2 < x \leqslant 4$ og $5 < x \leqslant 7$ og $x > 8$.

Oppgave 6

i) Årlig vekstfaktor er 1,046, 12-årlig vekstfaktor er $1{,}046^{12}$. Innskuddet er nåverdien $\frac{800\,000}{1{,}046^{12}} = 466\,347{,}63$.

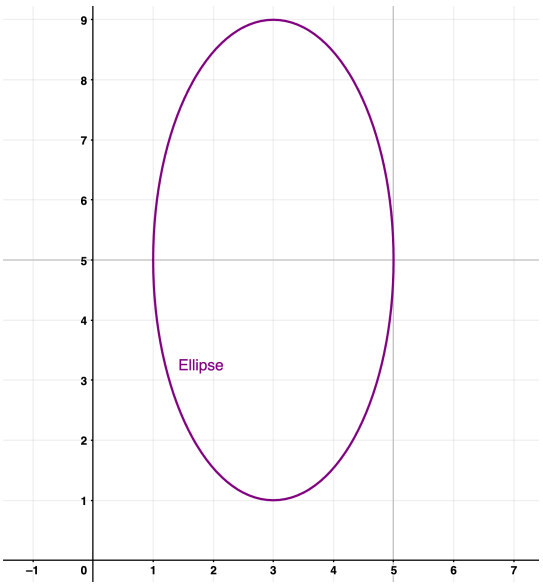
ii) La r være renten. Da er $(1+r)^6$ vekstfaktoren for 6 år. Dermed får vi likningen $\frac{800\,000}{1{,}046^{12}} \cdot (1+r)^6 = 800\,000$. Dette gir likningen $(1+r)^6 = 1{,}046^{12}$ som forenkler til $1 + r = 1{,}046^2$, slik at $r = 1{,}046^2 - 1 = 9{,}41\%$.

Oppgave 7

i) Vi har standardlikningen $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ hvor $(x_0\,,\, y_0) = (3\,,\, 5)$, $a = 2$ og $b = 4$. Det gir

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

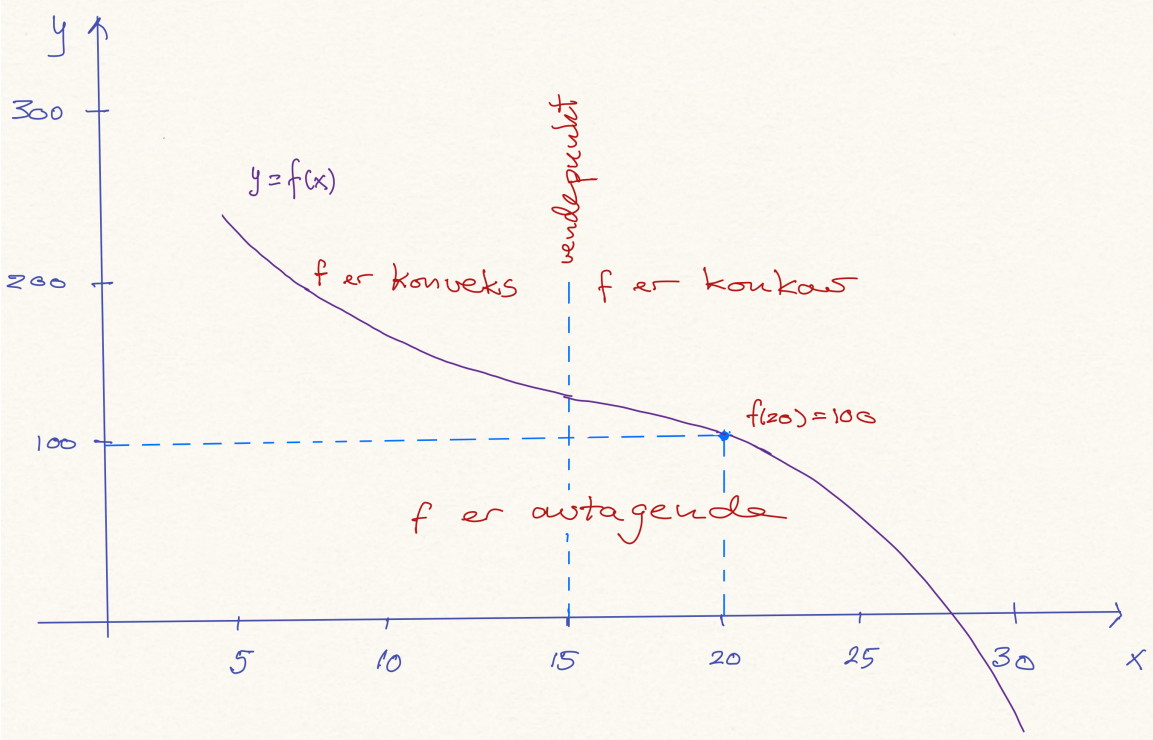
ii)



Figur 2: Ellipse

Oppgave 8

Funksjonen må være avtagende fordi $f'(x) < 0$, konveks for $x < 15$ fordi $f''(x) > 0$ og konkav for $x > 15$ fordi $f''(x) < 0$.



Figur 3: Grafen til $f(x)$ – en av mange muligheter

Oppgave 9

i) Ved kjerneregelen har vi $D'(p) = 150(-0{,}01 \cdot 2p)e^{-0{,}01p^2}$. Dermed er:

$$\varepsilon(p) = \frac{D'(p) \cdot p}{D(p)} = \frac{(-0{,}02p)150e^{-0{,}01p^2}p}{150e^{-0{,}01p^2}} = \underline{\underline{-0{,}02p^2}}$$

ii) Elastisk etterspørsel får vi når $\varepsilon(p) < -1$, dvs. $-0{,}02p^2 < -1$ som forenkler til $p^2 > 50$. Fordi prisen ikke er negativ, får vi $\underline{\underline{p > \sqrt{50}}}$.

iii) Fordi $10 > \sqrt{50}$, vil etterspørselen være priselastisk for $p = 10$. Det medfører at inntekten går ned hvis prisen øker litt fra 10.

Oppgave 10

Vi tenker på y som en funksjon av x og deriverer begge sider av likningen m.h.p. x ved å bruke kjerneregelen på venstre side og produktregelen på høyre side:

$$e^y y' = xy' + y \quad \text{som gir} \quad (e^y - x)y' = y \quad \text{og} \quad \underline{\underline{y' = \frac{y}{e^y - x}}}$$

Oppgave 11

Vi har at $e^{0,03x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ slik at $\frac{50e^{0,03x}+1}{120e^{0,03x}+2025} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{2025}$ og derfor

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ln\left(\frac{1}{2025}\right) = -\ln(2025)$$

Altså er $y = -\ln(2025)$ en horisontal asymptote for $f(x)$.

Vi deler teller og nevner i uttrykket $\frac{50e^{0,03x}+1}{120e^{0,03x}+2025}$ med $e^{0,03x}$ og får $\frac{50+e^{-0,03x}}{120+2025e^{-0,03x}}$. Dermed vil

$$f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ln\left(\frac{50}{120}\right) = \ln(5) - \ln(12)$$

og $y = \ln(5) - \ln(12)$ er en horisontal asymptote for $f(x)$.

For at $f(x)$ skal ha en vertikal asymptote må $\frac{50e^{0,03x}+1}{120e^{0,03x}+2025} = 0$ ha en løsning $x = a$, men telleren er større enn 1 for alle x så dette er ikke mulig. Altså: $f(x)$ har ingen vertikale asymptoter.

Oppgave 12

Vi har $P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$. Vi må derfor derivere $f(x)$ tre ganger. Vi bruker produktregelen og kjerneregelen med $u = x+1$ og får:

$$f'(x) = e^x \ln(x+1) + \frac{e^x}{x+1}$$

Først ledd er det samme og for andre ledd bruker vi brøkregelen:

$$f''(x) = e^x \ln(x+1) + \frac{e^x}{x+1} + \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = e^x \ln(x+1) + \frac{e^x}{x+1} + \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

De to første leddene er $f'(x)$. Ved brøkregelen (og produktregelen) gir derivasjon av siste ledd:

$$\left(\frac{xe^x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(x+1)e^x(x+1)^2 - 2x(x+1)e^x}{(x+1)^4} = \frac{((x+1)^2 - 2x)e^x}{(x+1)^3} = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$$

Dermed får vi:

$$f'''(x) = e^x \ln(x+1) + \frac{e^x}{x+1} + \frac{xe^x}{(x+1)^2} + \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$$

Med $x = 0$ får vi $f(0) = e^0 \ln(0+1) = 0$, $f'(0) = f(0) + \frac{e^0}{0+1} = 1$, $f''(0) = f'(0) + \frac{0e^0}{(0+1)^2} = 1$ og $f'''(0) = f''(0) + \frac{(0^2+1)e^0}{(0+1)^3} = 2$. Altså er $P_3(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.