Skoleeksamen (3t) MET11808 - Matematikk for siviløkonomer
9. mai 2025

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

i) Vi har $\frac{60}{1{,}09^5} = 38{,}996$. Nåverdien med årlig forrentning er dermed 38,996 millioner.

ii) Vi har $\frac{60}{e^{5\cdot 0{,}09}} = 38{,}258$. Nåverdien med kontinuerlig forrentning er dermed 38,258 millioner.

Oppgave 2

Vi har

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1\big) : \big(x-1\big) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
\underline{-x^4 \quad + x^3} \\
\qquad -3x^3 + 6x^2 \\
\qquad \underline{3x^3 - 3x^2} \\
\qquad\qquad 3x^2 - 4x \\
\qquad\qquad \underline{-3x^2 + 3x} \\
\qquad\qquad\qquad -x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Svaret er derfor $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ med restledd 0.

Oppgave 3

Vi ser at sentrum i ellipsen er punktet $(5\,,3)$, horisontal halvakse $a = 5$ og vertikal halvakse $b = 2$. Dermed er likningen til ellipsen på standardform gitt som

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

Oppgave 4

Produktet av to tall er negativt akkurat hvis ett av tallene er negativt og det andre positivt. Det gir løsningsmengden $\langle \leftarrow, -3\rangle$ og $\langle 4, 6\rangle$.

Oppgave 5

i) Summen av nåverdiene til betalingene gir nåverdien til betalingsstrømmen. Vi får nåverdien (i millioner) som den geometriske rekken $\frac{5}{1{,}1^{12}} + \frac{5}{1{,}1^{13}} + \cdots + \frac{5}{1{,}1^{30}} + \frac{5}{1{,}1^{31}}$ som lest baklengs gir første ledd $a_1 = \frac{5}{1{,}1^{31}}$, multiplikasjonsfaktor $k = 1{,}1$ og antall ledd $n = 31 - 11 = 20$. Formelen for en geometrisk rekke gir da at summen er

$$\frac{5}{1{,}1^{31}} \cdot \frac{1{,}1^{20} - 1}{0{,}1} = 14{,}920.$$

Altså er nåverdien til denne betalingsstrømmen lik 14,920 millioner.

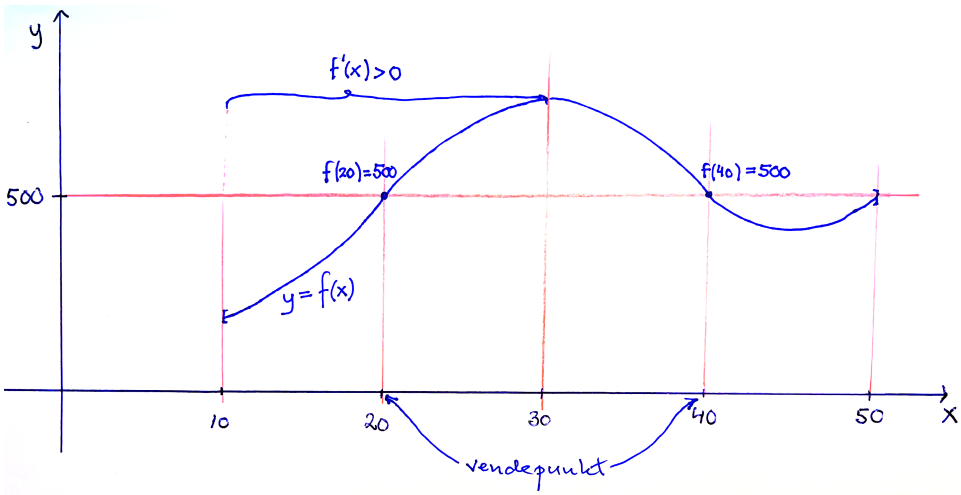
ii) Hvis vi multipliserer nåverdien med multiplikasjonsfaktoren for 6 år vil vi få fremtidsverdien om 6 år: $\frac{5}{1{,}1^{31}} \cdot \frac{1{,}1^{20}-1}{0{,}1} \cdot 1{,}1^6$ millioner $=$ 26,431 millioner. Dette er det samme som å regne fremtidsverdien om 6 år for hver betaling og legge sammen.

Oppgave 6

Ved å fullføre kvadratet får vi $f(x) = \ln((x-3)^2+1)$. Fordi $(x-3)^2+1$ er symmetrisk om linjen $x=3$ med minimumspunkt $x=3$ vil $f(x)$ også være symmetrisk om linjen $x=3$. Fordi $\ln(x)$ er strengt voksende vil $x=3$ også være minimumspunkt for $f(x)$ mens $x=-1$, som er lengst fra symmetrilinjen i definisjonsområdet, vil være maksimumspunktet. Altså er minimum til $f(x)$ gitt som $f(3) = \ln(1) = 0$ mens maksimum er $f(-1) = \ln(17) \approx 2{,}83$. Alternativt kan vi bruke ekstremverdisetningen for en kontinuerlig funksjon på et lukket intervall og si at maksimum og minimum finnes enten ved et endepunkt eller et stasjonært punkt. Da må vi løse likningen $f'(x) = 0$ for å finne det stasjonære punktet $x=3$ og sammenligne de tre verdiene $f(-1)$, $f(3)$ og $f(6)$.

Oppgave 7

Figur 1 viser et eksempel på skisse av en graf. For $x < 30$ ser vi at grafen er strengt voksende, dvs at $f'(x) > 0$. Vi ser at $x = 20$ er et vendepunkt fordi grafen er strengt konveks for $x < 20$ og strengt konkav for $20 < x < 40$. Vi ser også at $x = 40$ er et vendepunkt fordi grafen er strengt konkav for $20 < x < 40$ og strengt konveks for $x > 40$.



Figur 1: Graf

Oppgave 8

Det er tre kriterier:

1) $K(0) > 0$ fordi $K(0) = 300 \cdot e^{0{,}05 \cdot 0^2} = 300 > 0$.
2) $K(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant 0$ fordi ved kjerneregelen er $K'(x) = 300 \cdot 0{,}05 \cdot 2xe^{0{,}05x^2} = 30xe^{0{,}05x^2}$ og et produkt av tre positive tall 30, x og $e^{0{,}05x^2}$ er positivt.
3) $K(x)$ er strengt konveks for $x \geqslant 0$ fordi ved produkt- og kjerneregelen er $K''(x) = 30e^{0{,}05x^2} + 30x \cdot 0{,}1x \cdot e^{0{,}05x^2} = 3(10+x^2)e^{0{,}05x^2}$ som er et produkt av tre positive tall, altså positiv.

Oppgave 9

Fordi $K(x)$ er strengt konveks kan vi løse likningen $A(x) = K'(x)$ for å finne kostnadsoptimum. Her er $A(x) = K(x)/x$ gjennomsnittlig enhetskostnad. Med utregningen i oppgave 8 får vi likningen

$$\frac{300e^{0,05x^2}}{x} = 30xe^{0,05x^2} \quad \text{dvs} \quad 10e^{0,05x^2} = x^2e^{0,05x^2} \quad \text{dvs} \quad 10 = x^2$$

dvs at $\underline{\underline{x = \sqrt{10} \approx 3,162}}$ er kostnadsoptimum. Da er minimal gjennomsnittlig enhetskostnad $A(\sqrt{10}) = K'(\sqrt{10}) = 30\sqrt{10}e^{0,05\cdot 10} = \underline{\underline{30\sqrt{10e} \approx 156,411}}$.

Oppgave 10

Vi bruker Taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad to til $f(x)$ ved $x = 9$ for å tilnærme $f(10)$. Vi har

$$P_2(x) = f(9) + f'(9)(x-9) + \frac{f''(9)}{2}(x-9)^2 = 5 - 0,5(x-9) + 1,5(x-9)^2.$$

Da er $f(10) \approx P_2(10) = 5 - 0,5(10-9) + 1,5(10-9)^2 = 5 - 0,5 + 1,5 = \underline{\underline{6}}$.

Oppgave 11

i) Vi setter $y = f(x)$ og løser likningen for x: $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ og opphøyer e i venstresiden og i høyresiden. Det gir $e^y = \frac{x+1}{x-1}$. Multipliserer begge sider med $(x-1)$ og får $xe^y - e^y = x + 1$. Samler leddene med x på venstresiden: $xe^y - x = e^y + 1$ og faktoriserer venstresiden: $x(e^y - 1) = e^y + 1$. Dividerer begge sider med $(e^y - 1)$ (vi har $y \neq 0$ fordi $\frac{x+1}{x-1} = 1$ ikke har løsninger) og får $x = \frac{e^y+1}{e^y-1}$. Altså er $\underline{\underline{g(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}}}$.

ii) Vi har alltid $D_g = V_f$. For å finne verdimengden til f ser vi først at $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ er strengt avtagende fordi $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-2}{x^2-1} < 0$ for $x > 1$. Dessuten har vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1^+ \quad \text{som gir} \quad \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0^+.$$

Vi har også

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \infty \quad \text{som gir} \quad \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \infty \quad \text{fordi} \quad \ln(x) \quad \text{vokser uten øvre grense.}$$

Altså er $D_g = V_f = \underline{\underline{\langle 0, \infty\rangle}}$. Vi har alltid $V_g = D_f = \underline{\underline{\langle 1, \rightarrow\rangle}}$.

Oppgave 12

i) Fordi $e^{rp} > 0$, er både teller og nevner i $\dfrac{A}{e^{rp}+1}$ positive tall og dermed er brøken $D(p)$ også positiv. Vi har $D(p) = A(e^{rp}+1)^{-1}$. Ved å bruke kjerneregelen med $u(p) = e^{rp} + 1$ så $u'(p) = re^{rp}$ og $g(u) = Au^{-1}$ med $g'(u) = -Au^{-2}$ får vi

$$D'(p) = \frac{-Are^{rp}}{(e^{rp}+1)^2}.$$

Telleren er et produkt av et negativt tall $(-A)$ og et som alltid er positivt (re^{rp}) og altså negativ mens nevneren alltid er positiv. Altså er $D'(p)$ alltid negativ og dermed er $D(p)$ strengt avtagende på hele tallinjen.

ii) Vi har

$$\varepsilon(p) = \frac{D'(p) \cdot p}{D(p)} = \frac{\frac{-Are^{rp}}{(e^{rp}+1)^2} \cdot p}{\frac{A}{e^{rp}+1}}.$$

Vi dividerer med A oppe og nede og multipliserer med $(e^{rp} + 1)$ oppe og nede. Da får vi

$$\varepsilon(p) = \frac{-rpe^{rp}}{(e^{rp} + 1)}.$$

Vi ser at A ikke inngår i dette uttrykket for $\varepsilon(p)$ og $\varepsilon(p)$ er derfor uavhengig av verdien av A.