Skoleeksamen (3t) MET11808 - Matematikk for siviløkonomer

6. desember 2024

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

i) Vi bruker kjerneregelen med indre funksjon $u = u(x) = 0{,}5x^2 - 3x$ som gir ytre funksjon $g(u) = e^u$. Da er $f'(x) = u'(x) \cdot g'(u) = \underline{\underline{(x-3)e^{0{,}5x^2-3x}}}$.

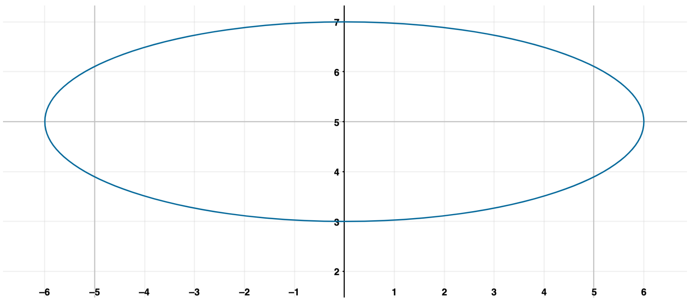
ii) De stasjonære punktene til $f(x)$ er løsningene på likningen $f'(x) = 0$, dvs $(x-3)e^{0{,}5x^2-3x} = 0$. Fordi $e^{0{,}5x^2-3x} > 0$ er eneste mulighet $\underline{\underline{x = 3}}$. For å avgjøre hvor $f(x)$ er voksende og avtagende ser vi på fortegnet til $f'(x)$ som er negativt hvis $x < 3$ og positivt hvis $x > 3$. Altså er $\underline{\underline{f(x) \text{ avtagende for } x \in \langle \leftarrow, 3]}}$ og $\underline{\underline{\text{voksende for } x \in [3, \rightarrow\rangle}}$.

Oppgave 2

Vi deler begge sider av likningen på 36 for å få den på standardform:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{(y-5)^2}{2^2} = 1$$

Da er sentrum i ellipsen $(0, 5)$, horisontal halvakse er $a = 6$ og vertikal halvakse er $b = 2$.



Figur 1: Ellipse

Oppgave 3

Vi trekker linjen gjennom origo A som tangerer grafen til kostnadsfunksjonen, se figur 2. Da er x-koordinatet til tangeringspunktet B lik kostnadsoptimum og stigningstallet til linjen er optimal enhetskostnad. På figuren ser vi $B \approx (20, 109)$ som gir $\underline{\underline{\text{kostnadsoptimum} \approx 20}}$ og $\underline{\underline{\text{minimal gjennomsnittlig enhetskostnad} \approx \frac{109}{20} = 5{,}45}}$.

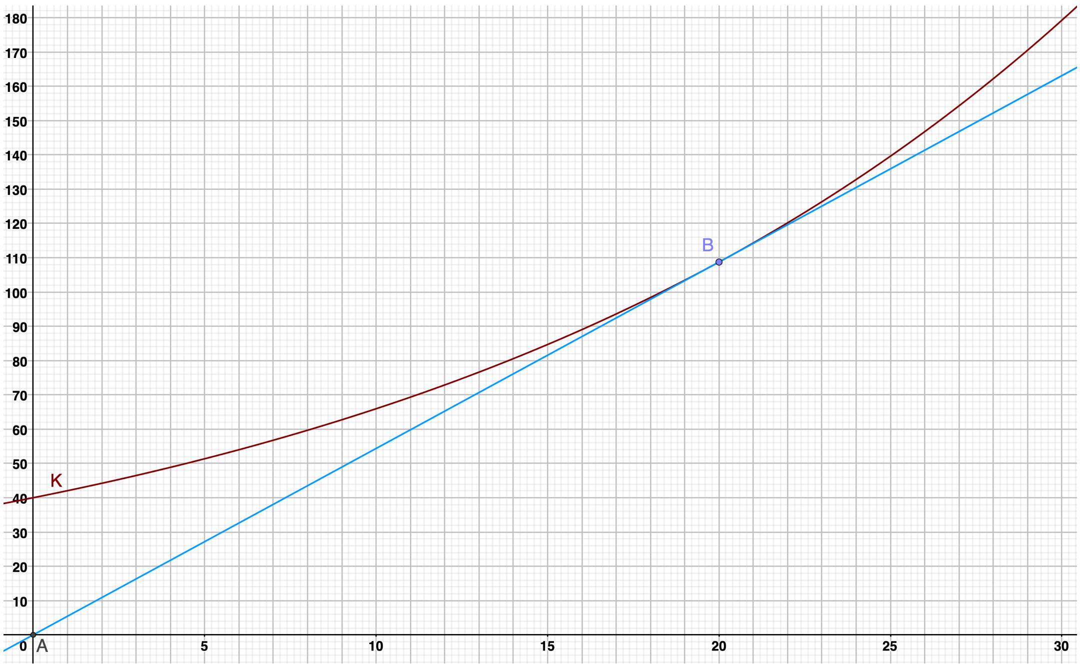
Oppgave 4

i) Vi leser den geometriske rekken baklengs slik at første ledd er $a_1 = 8\,000 \cdot 1{,}005^{24}$, multiplikasjonsfaktor er $k = 1{,}005$ og antall ledd er $n = 143 - 23 = 120$. Da gir formelen for summen av en geometrisk rekke at

$$8\,000 \cdot 1{,}005^{143} + 8\,000 \cdot 1{,}005^{142} + 8\,000 \cdot 1{,}005^{141} + \ldots + 8\,000 \cdot 1{,}005^{25} + 8\,000 \cdot 1{,}005^{24}$$

$$= 8\,000 \cdot 1{,}005^{24} \cdot \frac{1{,}005^{120} - 1}{0{,}005} = \underline{\underline{1\,477\,745{,}66}}.$$

ii) Hvis vi leser rekken fra venstre kan den være saldo (fremtidsverdi) på en bankkonto om 12 år med 6% nominell rente, månedlig forrentning (med månedsrente $6\%/12 = 0{,}005$), innskudd 8 000 hver måned, første innskudd om én måned fra nå, siste om 10 år fra nå (så 120 innskudd) som så blir stående på konto i 2 år etter siste innskudd.



Figur 2: Kostnadsfunksjon

Oppgave 5

Vi ser at $(30, 50)$ er symmetripunktet til hyperbelen (linjen gjennom punktene $(26, 47)$ og $(33, 51)$, og linjen gjennom punktene $(28, 48)$ og $(32, 52)$ skjærer hverandre i $(30, 50)$). Dermed har vi to av de tre tallene i standardformen for en hyperbelfunksjon: $f(x) = 50 + \frac{a}{x-30}$. For å bestemme a setter vi inn punktet $(32, 52)$ i $f(x)$, dvs $f(32) = 52$ som gir likningen $50 + \frac{a}{32-30} = 52$. Vi løser den og får $a = 4$. Altså $f(x) = 50 + \frac{4}{x-30}$.

Oppgave 6

I standardformen for en andregradsfunksjon $f(x) = a(x-s)^2 + d$ gir toppunktet $s = 12$ og $d = 24$, dvs $f(x) = a(x-12)^2 + 24$. Setter inn P og får likningen $a(10-12)^2 + 24 = 20$, dvs $a = -1$ og $f(x) = -(x-12)^2 + 24$.

Oppgave 7

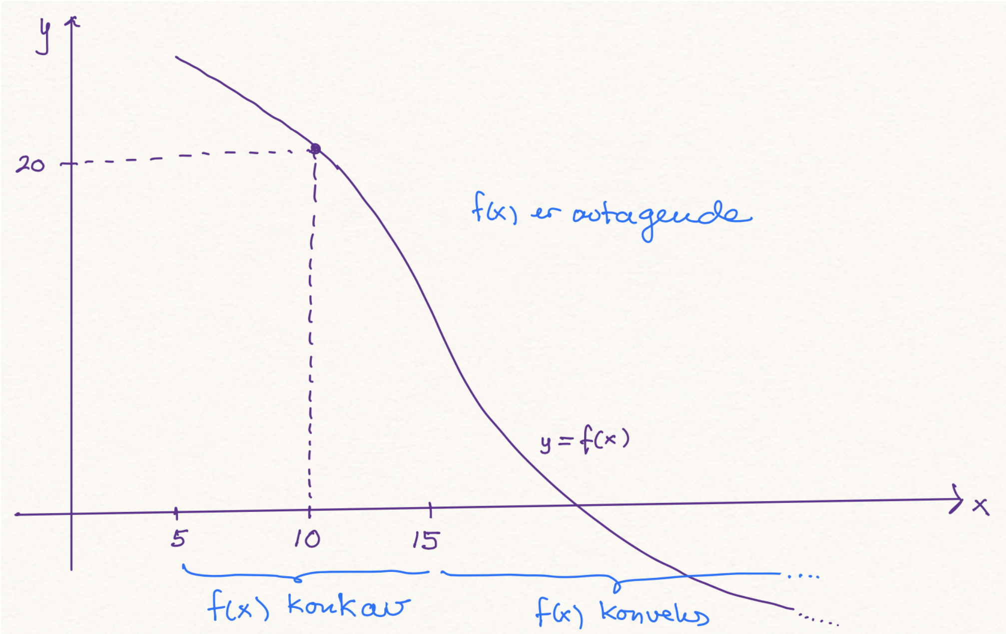
Funksjonen må være strengt konkav for x mellom 5 og 15, og strengt konveks for $x \geqslant 15$. Da kan grafen se ut som i figur 3.

Oppgave 8

i) Vi har $D'(p) = -1/p = -p^{-1}$ så $\varepsilon(p) = \frac{-p^{-1}p}{-\ln(p)} = \frac{1}{\ln(p)}$.

ii) Etterspørselen er elastisk hvis $\varepsilon(p) < -1$, dvs $\frac{1}{\ln(p)} < -1$, dvs $\frac{\ln(p)+1}{\ln(p)} < 0$. Vi har $\ln(p) < 0$ for $0 < p < 1$ derfor er ulikheten ekvivalent med at $\ln(p) + 1 > 0$, dvs $\ln(p) > -1$, dvs at $p \in \langle e^{-1}, 1\rangle$.

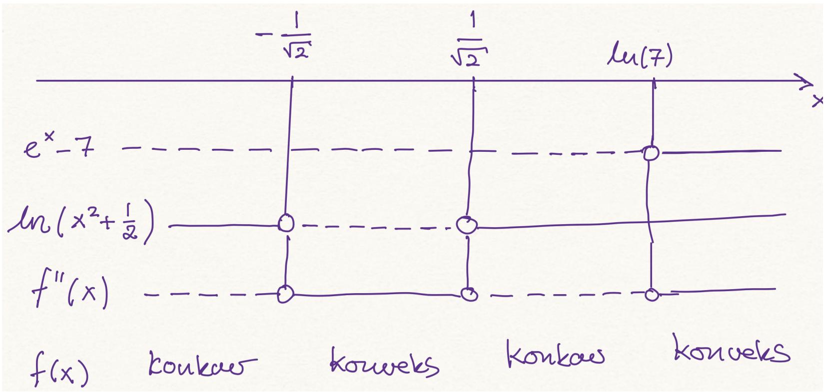
iii) Fordi $p = 0{,}5 > e^{-1}$, vil etterspørselen være elastisk og en liten økning i prisen fra 0,5 vil gi en lavere inntekt.



Figur 3: Avtagende graf

Oppgave 9

For å svare på spørsmålene lager vi et fortegnsskjema for $f''(x)$. Da trenger vi nullpunktene til $f''(x)$, dvs løsningene på likningene $e^x - 7 = 0$ og $\ln(x^2 + 0{,}5) = 0$. For $e^x - 7 = 0$ får vi $e^x = 7$, dvs $x = \ln(7)$. For $\ln(x^2 + 0{,}5) = 0$ får vi $x^2 + 0{,}5 = 1$, dvs $x^2 = 0{,}5$, dvs $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da får vi fortegnsskjema som i figur 4:



Figur 4: Fortegnsskjema

Dermed får vi:

i) Vendepunktene for $f(x)$ er $\underline{\underline{x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}}$ og $\underline{\underline{x = \ln(7)}}$.

ii) $f(x)$ er konkav i intervallet $\langle \leftarrow, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, konveks i intervallet $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, konkav i intervallet $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \ln(7)]$ og konveks i intervallet $[\ln(7), \rightarrow\rangle$.

Oppgave 10

i) Nåverdien av kontantstrømmen er summen av nåverdiene til betalingene:

$$\underline{\underline{\frac{A}{e^{3r}} + \frac{B}{e^{4r}} + \frac{C}{e^{5r}}}}$$

ii) Vi må løse ulikheten $\frac{100}{e^{5r}} > \frac{60}{e^{4r}}$. Vi multipliserer begge sider med $\frac{e^{5r}}{60} > 0$ og får $\frac{100}{60} > e^r$, dvs $e^r < \frac{5}{3}$, dvs $\underline{\underline{r < \ln(5) - \ln(3) = 51{,}08\%}}$.

Oppgave 11

i) Vi løser likningen $y = \frac{60e^{-0{,}01x}+100}{e^{-0{,}01x}+4}$ for x. Først multipliserer vi med nevneren $e^{-0{,}01x}+4$ på begge sider og får

$$e^{-0{,}01x}y + 4y = 60e^{-0{,}01x} + 100$$

Trekker fra 100 og $e^{-0{,}01x}y$ på begge sider og faktoriserer høyresiden:

$$4y - 100 = (60 - y)e^{-0{,}01x}$$

Deler på $60 - y$ på begge sider:

$$\frac{4y-100}{60-y} = e^{-0{,}01x}$$

Setter begge sider inn i $\ln(-)$ og multipliserer med -100 på begge sider. Det gir

$$-100\ln\frac{4y-100}{60-y} = x$$

Bytter variabler og får et uttrykk for den inverse funksjonen

$$\underline{\underline{g(x) = -100\ln\frac{4x-100}{60-x}}}$$

ii) Definisjonsområdet D_g er lik verdimengden V_f. Vi har $f(0) = \frac{60+100}{1+4} = 32$. Dessuten er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-0{,}6e^{-0{,}01x}(e^{-0{,}01x}+4) - (60e^{-0{,}01x}+100)(-0{,}01e^{-0{,}01x})}{(e^{-0{,}01x}+4)^2} \\ &= \frac{-0{,}6e^{-0{,}02x} - 2{,}4e^{-0{,}01x} + 0{,}6e^{-0{,}02x} + e^{-0{,}01x}}{(e^{-0{,}01x}+4)^2} = \frac{-1{,}4e^{-0{,}01x}}{(e^{-0{,}01x}+4)^2} < 0 \end{aligned}$$

for alle x. Altså er $f(x)$ avtagende. Vi har $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{60\cdot 0+100}{0+4} = 25$ så $D_g = V_f = \underline{\underline{\langle 25\,,\,32]}}$ og verdimengden $V_g = D_f = \underline{\underline{[0\,,\,\rightarrow\rangle}}$.

Oppgave 12

Ved polynomdivisjon får vi at $f(x)$ er

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 + 7x^2 - 100x - 700\big) : \big(x^2 + 2x - 35\big) = x + 5 + \dfrac{-75x-525}{x^2+2x-35} \\ \underline{-x^3 - 2x^2 \;\; + 35x} \\ \qquad\qquad 5x^2 \;\; - 65x - 700 \\ \qquad\quad \underline{-5x^2 \;\; - 10x + 175} \\ \qquad\qquad\qquad -75x - 525 \end{array}$$

Vi kan forkorte brøken fordi $x^2 + 2x - 35 = (x+7)(x-5)$ og $-75x - 525 = -75(x+7)$. Dermed får vi $f(x) = x + 5 - \frac{75}{x-5}$. Vi beregner $f'(x) = 1 + \frac{75}{(x-5)^2}$ og ser at $f'(x) > 1$. Spesielt er $f(x)$ strengt voksende for $x > 5$. Altså har ikke $f(x)$ noen maksimum eller minimum.