Skoleeksamen (3t) MET11808 - Matematikk for siviløkonomer
16. mai 2024

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

Sentrum i ellipsen er $(3\,,2)$ med horisontal halvakse $a = 3$ og vertikal halvakse $b = 2$. Dermed er standardlikningen for ellipsen

$$\underline{\underline{\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1}}$$

Oppgave 2

Vi ser at $(20\,,10)$ er skjæringspunktet til de to asymptotene, altså er standardformen for hyperbelfunksjonen $f(x) = 10 + \frac{a}{x-20}$ for et tall a. Vi ser også at punktet $(21\,,5)$ ligger på grafen til $f(x)$, dvs $f(21) = 5$, dvs $10 + \frac{a}{21-20} = 5$. Vi løser likningen og får $a = -5$. Altså er $\underline{\underline{f(x) = 10 - \frac{5}{x-20}}}$.

Oppgave 3

Siden P er toppunktet må symmetrilinjen for andregradsfunksjonen være $x = 6$ og maksimumsverdien $y = 10$. Altså er standardformen for andregradsfunksjonen $f(x) = a(x-6)^2 + 10$ for et tall a. Fra $f(4) = 8$ får vi likningen $a(4-6)^2 + 10 = 8$ som gir $a = -0{,}5$. Altså er $\underline{\underline{f(x) = -0{,}5(x-6)^2 + 10}}$.

Oppgave 4

i) Vi ser at grafen til $f(x)$ ligger under grafen til $g(x)$ for x mellom 1,2 og 2 og for x mellom 4,4 og 7,4. Altså er løsningen på ulikheten $\underline{\underline{1{,}2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ eller } 4{,}4 \leqslant x \leqslant 7{,}4}}$.

ii) Produktet $f(x) \cdot g(x)$ er større enn 0 når begge faktorene har samme fortegn. Dette skjer når x er mellom 4 og 5 og når x er mellom 7 og 8. Altså er løsningen på ulikheten $\underline{\underline{x \in [4\,,5] \text{ eller } x \in [7\,,8]}}$.

Oppgave 5

i) Hvis vi følger tangenten til grafen til $f(x)$ i $(4\,,0)$ bakover til $x = 3$ ser det ut til at tangenten vil gå gjennom punktet $(3\,,0{,}7)$. Altså er stigningstallet til tangenten $\underline{\underline{f'(4) \approx -0{,}7}}$.

ii) Vi har at $f''(x)$ er negativ der grafen bøyer nedover (er konkav) og $f''(x)$ er positiv der grafen bøyer oppover (er konveks). Overgangene mellom konveks/konkav er vendepunktene og de ser ut til å være $x = 4$ og $x = 7{,}5$. Dermed vil $\underline{\underline{f''(x) \leqslant 0 \text{ for } x \leqslant 4,\ f''(x) \geqslant 0 \text{ for } 4 \leqslant x \leqslant 7{,}5 \text{ og } f''(x) \leqslant 0 \text{ for } x \geqslant 7{,}5}}$.

Oppgave 6

i) Vi bruker kjerneregelen med $u(x) = x(10-x) = 10x - x^2$ og $g(u) = 30e^u$. Fordi $u'(x) = 10 - 2x = 2(5-x)$ og $g'(u) = 30e^u$ får vi $\underline{\underline{f'(x) = 60(5-x)e^{x(10-x)}}}$. Stasjonære punkter for $f(x)$ er nullpunkter for $f'(x)$. Så det eneste stasjonære punktet for $f(x)$ er $\underline{\underline{x = 5}}$.

ii) Maksimum/minimum til $f(x)$ er enten ved et stasjonært punkt eller i et endepunkt. Fordi $f(3) = 30e^{21}$, $f(5) = 30e^{25}$ og $f(8) = 30e^{16}$ får vi at $\underline{\underline{\text{minimumsverdien er } f(8) = 30e^{16}}}$ og $\underline{\underline{\text{maksimumsverdien er } f(5) = 30e^{25}}}$.

Oppgave 7

i) Månedsrenten er $6\%/12 = 0{,}5\%$. Første innbetaling står på konto i $12 \cdot (12-4) = 96$ renteperioder. Det er 97 innbetalinger. Altså blir den geometriske rekken for saldo om 12 år

$$\underline{\underline{15\,000 \cdot 1{,}005^{96} + 15\,000 \cdot 1{,}005^{95} + \cdots + 15\,000 \cdot 1{,}005 + 15\,000}}$$

ii) Hvis vi leser den geometriske rekken baklengs får vi første ledd $a_1 = 15\,000$, multiplikasjonsfaktor $k = 1{,}005$ og antall ledd $n = 97$. Formelen for summen av en geometrisk rekke gir da

$$15\,000 \cdot \frac{1{,}005^{97} - 1}{0{,}005} = \underline{\underline{1\,866\,640{,}27}}$$

Oppgave 8

i) Vi lar r betegne internrenten. Da skal nåverdien til kontantstrømmen være lik 0. Det gir likningen

$$\underline{\underline{-20 - \frac{20}{(1+r)} + \frac{25}{(1+r)^3} + \frac{40}{(1+r)^5} = 0}}$$

ii) Hvis vi setter inn $r = 14\%$ i venstresiden får vi at nåverdien er 0,1052. Hvis r øker vil potensene i nevnerene også øke og de positive brøkenes verdi minske (nåverdiene av fremtidige betalinger minsker når renten øker). Den negative brøkens verdi $(-\frac{20}{(1+r)})$ vil øke (bli mindre negativ), men denne effekten er mindre enn effekten av minskningene av de positive brøkene. Vi kan f. eks. prøve med $r = 14{,}05\%$. Da får vi at nåverdien er 0,0452. Altså er internrenten (litt) større enn 14,05%.

Oppgave 9

i) Vi ser at $f(x)$ er definert for alle x, så $f(x)$ har ingen vertikale asymptoter. Men

$$f(x) = 4 + 5e^{-0{,}1x} = 4 + \frac{5}{e^{0{,}1x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 4 + 0^+ = 4^+.$$

Altså er $y = 4$ en horisontal asymptote.

ii) For å finne uttrykket for $g(x)$ setter vi $y = f(x)$ og løser for x: Trekker fra 4 på begge sider og får $y - 4 = \frac{5}{e^{0{,}1x}}$. Multipliserer begge sider med $e^{0{,}1x}$ og får $(y-4)e^{0{,}1x} = 5$. Deler med $(y-4)$ på begge sider og får $e^{0{,}1x} = \frac{5}{(y-4)}$. Setter begge sider inn for x i funksjonen $\ln(x)$. Fordi $\ln(x)$ og e^x er omvendte funksjoner får vi $0{,}1x = \ln\frac{5}{(y-4)}$. Multiplikasjon med 10 på begge sider gir $x = 10\ln\frac{5}{(y-4)}$. Bytter variabler og får $\underline{\underline{g(x) = 10\ln\frac{5}{(x-4)}}}$. Definisjonsmengden til $g(x)$ er lik verdimengden til $f(x)$. Fordi $f(x)$ er avtagende er maksimumsverdien $f(0) = 4 + 5 \cdot 1 = 9$. Med resultatet i (i) er $D_g = V_f = \underline{\underline{\langle 4, 9]}}$. Dessuten er $V_g = D_f = \underline{\underline{[0, \rightarrow\rangle}}$.

Oppgave 10

i) Setter begge sider inn for x i funksjonen e^x. Fordi $\ln(x)$ og e^x er omvendte funksjoner får vi $x^4 - x^2 - 5 = e^0$, dvs $x^4 - x^2 - 6 = 0$. Substituerer $u = x^2$ og får andregradslikningen $u^2 - u - 6 = 0$ som har løsninger $u = 3$ og $u = -2$. Når vi substituerer tilbake får vi likningene $x^2 = 3$ og $x^2 = -2$. Den første har løsningene $x = \pm\sqrt{3}$, mens den andre ikke har noen løsninger.

ii) Her er det mange måter å velge parameter. Vi kan f. eks. la $x = s$ være symmetrilinjen til andregradsfunksjonen (altså punktet i midten mellom røttene). Da er det minste nullpunktet $x = s - 3$ mens det største nullpunktet er $x = s + 3$. Dermed kan vi skrive

$$x^2 + bx + c = [x-(s-3)][x-(s+3)] = x^2 - (s+3)x - (s-3)x + (s-3)(s+3) = x^2 - 2sx + s^2 - 9$$

Spesielt er $b = -2s$ og $c = s^2 - 9$.

Oppgave 11

i) Vi har $P_3(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6}\cdot x^3$. Ved å bruke kjerneregelen med $u = x+1$ får vi $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ og $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$. Vi får $f(0) = \ln(0+1) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$, $f''(0) = \frac{-1}{(0+1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$ og $f'''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = 2$. Altså er $P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

ii) $\ln(1{,}2) = \ln(0{,}2+1) \approx P_3(0{,}2) = 0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^3}{3} = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}002667 = 0{,}1827$

Oppgave 12

i) Hvis r_{eff} er den effektive årsrenten vil $K_{10} = K_0 \cdot (1 + r_{\text{eff}})^{10}$. Løser denne likningen for r_{eff}. Deler med K_0 på begge sider:

$$(1 + r_{\text{eff}})^{10} = \frac{K_{10}}{K_0} \quad \text{og opphøyer begge sider i } \frac{1}{10}: \quad 1 + r_{\text{eff}} = \left(\frac{K_{10}}{K_0}\right)^{\frac{1}{10}}$$

Dvs

$$r_{\text{eff}} = \left(\frac{K_{10}}{K_0}\right)^{\frac{1}{10}} - 1$$

ii) Med kontinuerlig forrentning er årlig vekstfaktor e^r når r er den nominelle årsrenten. Fordi årlig vekstfaktor også er $1 + r_{\text{eff}}$ får vi

$$e^r = 1 + r_{\text{eff}} = \left(\frac{K_{10}}{K_0}\right)^{\frac{1}{10}}$$

Setter inn i $\ln(x)$ og får

$$r = \ln(1 + r_{\text{eff}}) = \frac{1}{10}(\ln K_{10} - \ln K_0)$$