Løsning: MET11807 2022-05-23

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -6 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & a & 7 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & a & 7 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & a+12 & -2 & 14 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 14 & 2 \end{array}\right)$$

Starten på Gauss-prosessen, som er felles for alle verdier av a

a) $a=-12$:

setter inn overfor

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 14 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 14 & 2 \end{array}\right) \updownarrow \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 14 & -2 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} x - 4y + 3z - 4w &= 3 \\ 2y - 2z + 14w &= 2 \\ -2z + 14w &= -2 \end{aligned}$$

w fri

$x = 4\cdot 2 - 3(7w+1) + 4w + 3 \Rightarrow x = \underline{8-17w}$

$2y = 2(7w+1) - 14w + 2 = 4 \Rightarrow \underline{y=2}$

$-2z = -14w - 2 \Rightarrow z = \underline{7w+1}$

Løsning: $(x,y,z,w) = \underline{(8-17w,\ 2,\ 1+7w,\ w)}$ med w fri

Uendelig mange løsninger, én frihetsgrad

b) Fortsetter Gauss-eliminasjon med generell a:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & a+12 & -2 & 14 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 14 & 2 \end{array}\right) \updownarrow \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 14 & 2 \\ 0 & a+12 & -2 & 14 & -2 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & a+12 & -2 & 14 & -2 \end{array}\right) \cdot(-(a+12)) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & a+10 & * & ** \end{array}\right)$$

hvor $* = 14 - 7(a+12) = -70-7a = -7(a+10)$

$** = -2-(a+12) = -14-a$

For å ikke få noen løsninger, må pivot i siste rad være i siste kolonne.

Dette gir

$$\left.\begin{aligned} a+10 &= 0 \\ -7(a+10) &= 0 \\ -14-a &\neq 0 \end{aligned}\right\}$$

$a=-10$ gir null i de fire første posisjonene. Da er $-14+10=-4\neq 0$ pivot i siste rad.

$a=-10$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Konklusjon: Ingen løsninger $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{a=-10}}$

2.

a) $\int_0^1 6\sqrt{x} - 11x\sqrt[5]{x}\,dx = \int_0^1 6x^{1/2} - 11x^{6/5}\,dx$

$= \left[6\cdot\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - 11\cdot\left(\frac{5}{11}x^{11/5}\right) + C\right]_0^1 = \left[4x^{3/2} - 5x^{11/5} + C\right]_0^1$

$= \left[4x\sqrt{x} - 5x^2\sqrt[5]{x}\right]_0^1 = (4-5) - 0 = \underline{\underline{-1}}$

b) $\int \frac{21-x}{9-x^2}\,dx = \int \frac{3}{3-x} + \frac{4}{3+x}\,dx = 3\ln|3-x|\cdot\frac{1}{(-1)} + 4\ln|3+x|\cdot\frac{1}{1} + C$

$= \underline{4\ln|3+x| - 3\ln|3-x| + C}$

$\frac{21-x}{9-x^2} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} \quad \Big|\cdot(3-x)(3+x)$

$21-x = A(3+x) + B(3-x)$

$21-x = (3A+3B) + x(A-B)$

$\Downarrow$

$3A+3B = 21$
$A-B = -1$

$A+B = 7$
$A-B = -1$
$2A = 6$
$A = \underline{3} \qquad B = 7-A = \underline{4}$

c) $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot(-2\sqrt{x})\,du = \int \frac{-2(1-u)}{u}\,du$

$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-\sqrt{x} \\ du &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{aligned}}$

$\sqrt{x} = 1-u$
$dx = -2\sqrt{x}\,du$

$= \int \frac{-2+2u}{u}\,du = \int 2 - \frac{2}{u}\,du = 2u - 2\ln|u| + C$

$= \underline{2(1-\sqrt{x}) - 2\ln|1-\sqrt{x}| + C}$

d) $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) \implies f(1) - f(0) = -A$, der

A = arealet mellom grafen til $f'(x)$ og x-aksen på intervallet $[0,1]$

$\approx$ ca 4 ruter $= 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$

siden $f(x)$ er en antiderivert av $f'(x)$ per defn.

Konklusjon: $f(1) - f(0) = -A$

$\approx \underline{\underline{-0.25}}$

e) max/min $f(x)$:

Kandidatpunkt:

i) Randpunkt $x=-1$, $x=2$

ii) Stasjonære punkt: $x=0$, $x=1$ $(f'(x)=0)$

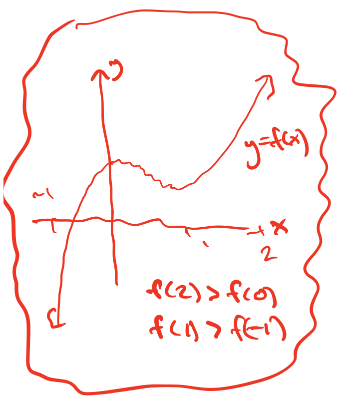
Fortegnslinje for $f'(x)$:

	-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Mulige max: $x=0$, $x=2$

$$f(2)-f(0) = \int_0^2 f'(x)\,dx = -A_{01} + A_{12} > 0$$

der A_{01}, A_{12} er arealet mellom grafen til $f'(x)$ og x-aksen i $[0,1]$ og $[1,2]$, og $A_{12} > A_{01}$ fra figur.



Mulig min: $x=-1$, $x=1$

$$f(1)-f(-1) = \int_{-1}^{1} f'(x)\,dx = A_{-1,0} - A_{01} > 0$$

der $A_{-1,0}$ er arealet mellom grafen til $f'(x)$ og x-aksen i $[-1,0]$. Fra figur er $A_{-1,0} > A_{01}$.

Konklusjon: $x=2$ er maksimumspunktet for f
$x=-1$ er minimumspunktet for f

3. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a^2-1) - 1\cdot(a-2) + 2(1-2a) = a^3 - a - a + 2 + 2 - 4a = a^3 - 6a + 4$$

utregning av $|A|$ for vilkårlig a

a) $|A| = 4 \neq 0$ (setter inn)

$\Downarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C_{11}=-1$ $C_{12}=2$ $C_{13}=1$

$C_{22}=-4$ $C_{23}=2$

$C_{33}=-1$

A symmetrisk $\Rightarrow$ adj(A) symm.

b) $|A| = a^3 - 6a + 4$: (se ovenfor)

Ser at $|A| = a^3 - 6a + 4 = 2^3 - 6\cdot 2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$ når $\underline{a=2}$, så $a-2$ er en faktor i uttrykket for $|A|$.

$$a^3 - 6a + 4 : a - 2 = a^2 + 2a - 2$$
$$a^3 - 2a^2$$
$$2a^2 - 6a + 4$$
$$2a^2 - 4a$$
$$-2a + 4$$
$$-2a + 4$$
$$0$$

$\Downarrow$

$$|A| = \underline{a^3 - 6a + 4} = (a-2)(a^2 + 2a - 2)$$
$$= \underline{(a-2)(a - (-1+\sqrt{3}))(a - (-1-\sqrt{3}))}$$

$a^2 + 2a - 2 = 0$

$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-2)}}{2}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{2}$

$= -1 \pm \sqrt{3}$

$|A| = 0$ for $\underline{a=2}$, $\underline{a = -1 \pm \sqrt{3}}$

c) Når $a \neq 2, -1 \pm \sqrt{3}$ så er $|A| \neq 0 \Rightarrow A\underline{x} = \underline{0}$ gir $\underline{x} = A^{-1}\cdot \underline{0} = 0$

Kun løsning med $\underline{x} = \underline{0}$

Prøver derfor en av verdiene $a = 2$, $a = -1 \pm \sqrt{3}$, og $a=2$ gir enklest regning:

$\underline{a=2}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vet at $|A| = 0$, så det må være uendelig mange løsninger (siden $\underline{b} = \underline{0}$)

Løser vha Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + 2y + z = 0$

$-3y = 0$

(z fri)

$\Downarrow$

$\underline{y = 0}$

$X = -2\cdot 0 - z = \underline{-z}$

Resultat:

$(x,y,z) = \underline{(-z, 0, z)}$ med z fri

Velger for eksempel $\underline{z=1}$, så får vi

$(x,y,z) = \underline{\underline{(-1, 0, 1)}}$: $\quad A\cdot\underline{X} = \underline{0}$ når $(x,y,z) = (-1,0,1)$ og $\underline{a=2}$

Det finnes mange andre løsninger.

4. $f(x,y) = x^2y - 5xy^2 + xy^3$

a) $f'_x = 2xy - 5y^2 + y^3 = y(2x - 5y + y^2) = 0$

$f'_y = x^2 - 10xy + 3xy^2 = x(x - 10y + 3y^2) = 0$

$\boxed{\begin{matrix} y=0 \text{ eller } 2x-5y+y^2=0 \\ x=0 \text{ eller } x-10y+3y^2=0 \end{matrix}}$

i) $x=0, y=0$: $(x,y) = (0,0)$

ii) $y=0$, $x-10y+3y^2=0$: $x=0 \rightarrow (x,y) = (0,0)$

iii) $x=0$, $2x-5y+y^2=0$: $y^2-5y = y(y-5)=0$, $y=0$ eller $y=5$ $\Big\}$ $(x,y) = (0,0), (0,5)$

iv) $\left.\begin{matrix} 2x-5y+y^2=0 \\ x-10y+3y^2=0 \end{matrix}\right\}$

$x = 10y - 3y^2$

$2(10y-3y^2) - 5y + y^2 = 0$

$-5y^2 + 15y = 0$

$-5y(y-3) = 0$

$y=0$ eller $y=3$

$x=0$ $\quad y = 30-27 = 3$

$(x,y) = (0,0)$, $(3,3)$

Konklusjon: Stasjonære pkt for f er $(0,0)$, $(0,5)$, $(3,3)$

b) $H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x-10y+3y^2 \\ 2x-10y+3y^2 & -10x+6xy \end{pmatrix}$

$(0,5)$: $H(f)(0,5) = \begin{vmatrix} 10 & 25 \\ 25 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ $\det = 10\cdot 0 - 25^2 = -625 < 0$

$(0,5)$ er sadelpkt

$(3,3)$: $H(f)(3,3) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 24 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det = 6\cdot 24 - 3\cdot 3 = 144 - 9 = 135 > 0$

$\text{tr} = 6 + 24 = 30 > 0$

$(3,3)$ er lokalt minimum

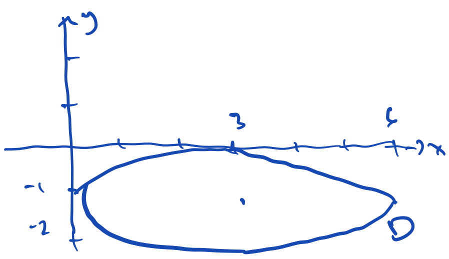
5. max $f(x,y) = x+3y$ når $x^2-6x+9y^2+18y+9=0$

a) D: $x^2-6x+9y^2+18y+9=0$

$$x^2-6x+9+9(y^2+2y+1)+\cancel{9} = \cancel{9}+9 \quad |:9$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$$

ellipse, senter $(3,-1)$, halvakser $a=\sqrt{9}=3$, $b=\sqrt{1}=1$



D er begrenset siden

$0 \leq x \leq 6$

$-2 \leq y \leq 0$

b) $L = x+3y-\lambda(x^2-6x+9y^2+18y+9)$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= 1-\lambda(2x-6)=0 \\ L'_y &= 3-\lambda\cdot(18y+18)=0 \\ & x^2-6x+9y^2+18y+9=0 \end{aligned}}$$

Lagrange-betingelsene

D er begrenset, så problemet har max ved ekstremverdisetn.

Ingen tillatte pkt med degenerert bibetingelse siden D er en ellipse

$\Downarrow$

max = kandidatpkt med størst verdi

$$\lambda = \frac{1}{2x-6} = \frac{3}{18y+18}$$

$$18y+18 = 3(2x-6)$$

$$18(y+1) = 6(x-3)$$

$$\Rightarrow \underline{x-3 = 3\cdot(y+1)}$$

Setter inn i ellipselikn: $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$

$$\frac{3^2(y+1)^2}{9} + (y+1)^2 = 1$$

$$2(y+1)^2 = 1 \Rightarrow (y+1)^2 = 1/2$$

$$\lambda = \frac{1}{2(x-3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3(\pm\sqrt{1/2})} = \pm\frac{1}{6\sqrt{1/2}}$$

$$x-3 = 3\cdot(\pm\sqrt{1/2})$$
$$x = 3 \pm 3\sqrt{1/2}$$

$$\leftarrow \begin{cases} y+1 = \pm\sqrt{1/2} \\ y = -1 \pm \sqrt{1/2} \end{cases}$$

Kandidatpkt: $(x,y;\lambda) = \left(3+3\sqrt{1/2},\ -1+\sqrt{1/2},\ \frac{1}{6\sqrt{1/2}}\right)$, $f = 6\sqrt{1/2}$

$\left(3-3\sqrt{1/2},\ -1-\sqrt{1/2};\ \frac{-1}{6\sqrt{1/2}}\right)$ $f = -6\sqrt{1/2}$

Ser at $f_{max} = 6\cdot\sqrt{1/2} = \frac{6\cdot\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

i $\left(3+3\sqrt{1/2}, -1+\sqrt{1/2};\ \frac{1}{6\sqrt{1/2}}\right)$

6. a) Skriver bibetingelsen $x(x^2+y^2) - (x^2-y^2) = 0$

$$g(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0$$

Degenerert bibetingelse:

(1) $g'_x = 3x^2 + y^2 - 2x = 0$

(2) $g'_y = 2xy + 2y = 0 \Rightarrow 2y(x+1) = 0 \Rightarrow y = 0$ eller $x = -1$

$y=0$: (1) gir $3x^2 - 2x = 0$, $x(3x-2) = 0$, $x=0$, $x = 2/3$ $\Rightarrow (0,0), (2/3, 0)$

$x=-1$: (1) gir $3+y^2+2=0$, $5+y^2=0$ umulig — ingen pkt.

Av de to punktene $(0,0)$, $(2/3,0)$, er det kun $(0,0)$ som er tillatt (dvs passer i bibetingelsen $g(x,y)=0$)

Konklusjon: Et tillatt pkt $(0,0)$ med degenerert bibetingelse.

b) max $f(x,y) = y$ når $x(x^2+y^2) = x^2 - y^2$

Nivåkurver for f:

$f(x,y) = a$

$y = a$

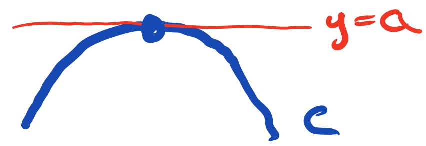
horisontale rette linjer

$C: x(x^2+y^2) = x^2 - y^2$

har horisontal tangent

$\Uparrow$

nivåkurven $y=a$ treffer kurven C tangentielt



$\Uparrow$

punktene (x,y) på C (tillatte punkt) som oppfyller FOC $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ for en λ

$\Uparrow$

ordinære kandidatpunkt som oppfyller Lagrange betingelsene FOC+C.