SENSORVEILEDNING - Skriftlig eksamen

MET 11807
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	17.12.2019	Kl. 09:00
Innlevering:	17.12.2019	Kl. 14:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Løsning	MET 11807 Matematikk for siviløkonomer
Dato	17. desember 2019 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, bytter om de to første radene (for å forenkle regningen i Gauss-prosessen) og markerer første pivot-posisjon. Deretter gjør vi elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Så markerer vi pivotposisjonen i andre rad, og bruker den til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er dermed uendelig mange løsninger med z fri siden z-kolonnen ikke har noen pivotposisjoner, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} 3y - 3z = -3 \quad &\Rightarrow \quad 3y = 3z - 3 & y &= z - 1 \\ -x + 2y - z = -2 \quad &\Rightarrow \quad -x = -2(z-1) + z - 2 = -z & x &= z \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (z, z-1, z)$ der z er en fri variabel.

b) Vi regner ut determinanten ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ -1 & 2 & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4+a) - a(-2-a^2) - 1(1-2a) = a^3 + 6a + 7$$

Vi vet fra a) at $\det(A) = 0$ når $a = -1$, siden det er uendelig mange løsninger i dette tilfellet. Vi kan også se dette direkte ved å sette inn $a = -1$ i uttrykket for determinanten. Polynomdivisjon gir at

$$|A| = a^3 + 6a + 7 = (a+1)(a^2 - a + 7)$$

og $a^2 - a + 7 = 0$ har ingen løsninger. Dermed har vi at $|A| = 0$ kun for $a = -1$.

c) Når $a = 0$ ser vi fra uttrykket i b) at $|A| = 7$. Dermed har vi at den inverse matrisen er gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2.

a) Nullpunktene til nevneren $4 - x$ er $x = 4$, og telleren $x^2 - 9x + 5 \neq 0$ i $x = 4$. Dermed er den vertikale asymptoten $x = 4$. Polynomdivisjon gir

$$\frac{x^2 - 9x + 5}{4 - x} = -x + 5 + \frac{-15}{4 - x}$$

Dermed har f den skrå asymptoten $y = -x + 5$.

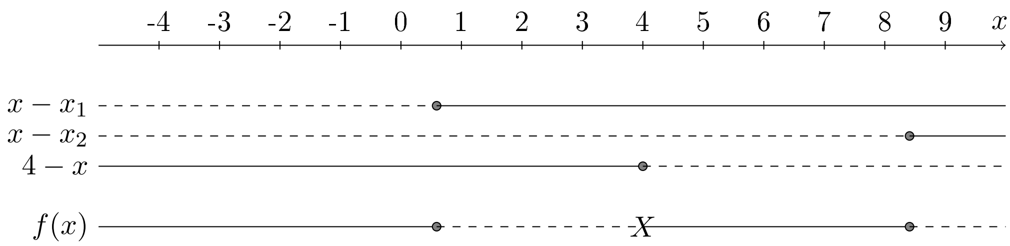
b) Vi har at $f(x) = 0$ når $x^2 - 9x + 5 = 0$, og dette gir røttene

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-20}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{2}$$

Vi skriver $x_1 = (9 - \sqrt{61})/2 \approx 0.59$ og $x_2 = (9 + \sqrt{61})/2 \approx 8.41$ for de to nullpunktene til f. Vi bruker faktoriseringen

$$f(x) = \frac{x^2 - 9x + 5}{4 - x} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{4 - x}$$

til å sette opp fortegnsdiagram for f, som er vist nedenfor. Fra fortegnslinjen til $f(x)$ ser vi at $f(x) > 0$ når $x < x_1 \approx 0.59$ og når $4 < x < x_2 \approx 8.41$.



c) For å avgjøre når f er konveks og konkav, regner vi ut $f''(x)$. Vi bruker funksjonsuttrykket fra a) og finner først den deriverte:

$$f(x) = -x + 5 + \frac{-15}{4-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1 + (-15)(-1)(4-x)^{-2} \cdot (-1) = -1 - \frac{15}{(4-x)^2}$$

Dette gir

$$f''(x) = -15(-2)(4-x)^{-3} \cdot (-1) = -\frac{30}{(4-x)^3}$$

Det betyr at $f''(x) < 0$ når $x < 4$, og $f''(x) > 0$ når $x > 4$. Dermed er f konkav i $(-\infty,4)$ og konveks i $(4,\infty)$.

Oppgave 3.

a) Vi skriver $x\sqrt{x} = x^{3/2}$ som en potens, og bruker potensregelen for derivasjon:

$$\int 30x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 30x^{3/2}\,\mathrm{d}x = 30\frac{2}{5}x^{5/2} + C = 12x^2\sqrt{x} + C$$

b) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = e^{-x}$ og $v = x$, som gir $u = -e^{-x}$ og $v' = 1$, og dermed

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} \cdot x - \int -e^{-x} \cdot 1\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

c) Vi faktoriserer nevner som $4 - 9x^2 = (2+3x)(2-3x)$, og forenkler integranden (uttrykket som skal integreres) ved delbrøksoppspaltning. Dette gir

$$\frac{6-3x}{4-9x^2} = \frac{A}{2+3x} + \frac{B}{2-3x} \quad \Rightarrow \quad 6 - 3x = A(2-3x) + B(2+3x)$$

Det vil si $6 - 3x = (2A+2B) + (3B-3A)x$, eller at $2A + 2B = 6$ og $3B - 3A = -3$. Dette lineære systemet kan skrives $A + B = 3$ og $B - A = -1$, som gir $2B = 2$ ved addisjon av likningene, eller $B = 1$ og $A = 2$. Integralet blir dermed

$$\int \frac{6-3x}{4-9x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2+3x} + \frac{1}{2-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|2+3x| - \frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$$

d) Vi har at deler opp integralet, og uttrykker det ved hjelp av arealene A_1 og A_2. Dette gir

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2$$

siden $f(x) > 0$ i intervallet $(-2{,}0)$ og $f(x) < 0$ i intervallet $(0{,}1)$. Vi løser likningen for A_1, og dette gir

$$A_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + A_2 = \frac{18}{5} + \frac{22}{15} = \frac{76}{15} \approx 5.07$$

Oppgave 4.

a) Prosjektets internrente er diskonteringsrenten r som gjør nåverdien til prosjektets kontantstrøm lik null, det vil si løsningen av likningen

$$-40 + \frac{I_1}{1+r} + \frac{I_2}{(1+r)^2} + \cdots = 0$$

der $I_1 = 3.2$, og I_n er betalingen etter n år. Denne likningen kan også skrives

$$\frac{I_1}{1+r} + \frac{I_2}{(1+r)^2} + \cdots = 40$$

altså at nåverdien til kontantstrømmen av betalinger er lik investeringen. Hvis alle betalingene hadde vært lik I_1, ville internrenten vært 8% siden

$$\frac{3.2}{1.08} + \frac{3.2}{1.08^2} + \cdots = \frac{3.2}{1.08} \cdot \frac{1}{1 - 1/1.08} = \frac{3.2}{0.08} = 40$$

ved formelen for en uendelig geometrisk rekke. Siden betalingene er økende, er $I_1 = 3.2$ mill. kr, $I_2 > 3.2$ mill. kr, og $I_n > 3.2$ mill. kr for $n > 2$. Dermed er

$$\frac{I_1}{1.08} + \frac{I_2}{1.08^2} + \cdots > \frac{3.2}{1.08} + \frac{3.2}{1.08^2} + \cdots = \frac{3.2}{0.08} = 40$$

Det vil si at nåverdien av betalingene er større enn 40 mill. kr ved diskonteringsrente 8%. Den diskonteringsrenten som gir nåverdi akkurat 40 mill. kr må være større enn 8%, siden høyere diskonteringsrente gir lavere nåverdi for kontantstrømmen av betalinger. Det betyr at internrenten $r > 8\%$.

b) Terminrenten blir $r = 0.24/4 = 0.06$, og dermed blir kvartalsbeløpet A gitt ved likningen

$$200\,000 = \frac{A}{1.06} + \frac{A}{1.06^2} + \cdots + \frac{A}{1.06^{20}} = \frac{A}{1.06^{20}} + \cdots + \frac{A}{1.06^2} + \frac{A}{1.06}$$

Vi har byttet om rekkefølgen på leddene slik at det blir enklere å regne ut summen av den geometriske rekken. Vi bruker $k = 1.06$ og $a_1 = A/1.06^{20}$, og får likningen

$$200\,000 = \frac{A}{1.06^{20}} \cdot \frac{1.06^{20} - 1}{1.06 - 1} = \frac{A \cdot (1.06^{20} - 1)}{0.06 \cdot 1.06^{20}}$$

ved formelen for en geometrisk rekke, og kvartalsbeløpet blir

$$A = \frac{200\,000 \cdot 0.06 \cdot 1.06^{20}}{1.06^{20} - 1} \approx 17\,436.91$$

Vi kan også finne kvartalsbeløpet ved å bruke formelen for annuitetslån direkte. Beløpet N som er nødvendig for å innfri lånet etter 2 år kan vi finne ved å neddiskontere tilbakebetalingen A i åttende kvartal og alle etterfølgende kvartalsbetalinger til tidspunktet når N skal betales inn. Innbetalingen N er dermed

$$N = A + \frac{A}{1.06} + \cdots + \frac{A}{1.06^{12}} = \frac{A}{1.06^{12}} + \cdots + \frac{A}{1.06} + A$$

Vi skriver også her om til en geometrisk rekke som er enklere å regne ut, med $k = 1.06$, $n = 13$, og $a_1 = A/1.06^{12}$. Vi får at

$$N = \frac{A}{1.06^{12}} \cdot \frac{1.06^{13} - 1}{1.06 - 1} = \frac{A \cdot (1.06^{13} - 1)}{0.06 \cdot 1.06^{12}} \approx 163\,625.26$$

Vi må altså betale inn beløpet 163 625.26 kr for å innfri lånet etter to år.

Oppgave 5.

a) De partiellderiverte til $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$ er $f'_x = 8x - 2xy^2$ og $f'_y = 18y - 2yx^2$, og førsteordensbetingelsene $f'_x = f'_y = 0$ er gitt ved

$$2x(4 - y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ eller } y^2 = 4$$
$$2y(9 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ eller } x^2 = 9$$

Den første likningen gir $x = 0$ eller $y = \pm 2$. Hvis $x = 0$, gir den andre likningen $y = 0$. Hvis $y = \pm 2$, så gir den andre likningen $x = \pm 3$. Dermed finner vi de fem stasjonære punktene $(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (\pm 3, \pm 2)$.

b) Vi bruker annenderivert-testen for å klassifisere de fem stasjonære punktene. Først regner vi ut Hesse-matrisen til f. For et generelt punkt (x,y) er den gitt ved

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 2y^2 & -4xy \\ -4xy & 18 - 2x^2 \end{pmatrix}$$

I punktet $(x,y) = (0,0)$ er $\det H(f)(0,0) = 8 \cdot 18 > 0$, og $A = 8 > 0$, $C = 18 > 0$. Dermed er $(0,0)$ et lokalt minimumspunkt ved annenderivert-testen. I de fire punktene $(x,y) = (\pm 3, \pm 2)$ er $\det H(f)(\pm 3, \pm 2) = 0 \cdot 0 - 16 \cdot 4 \cdot 9 < 0$, og dermed er $(\pm 3, \pm 2)$ sadelpunkt ved annenderivert-testen.

c) Likningen $x^2 + y^2 = 13$ er en sirkel med radius $\sqrt{13}$ og sentrum i origo. Dette er en begrenset kurve, og ekstremverdisetningen gir derfor at Lagrange-problemet har et minimum. Vi kan bruke Lagranges metode for å finne kandidatpunkt, og lar $\mathcal{L} = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2 - \lambda(x^2 + y^2)$. Vi ser på Lagrange-betingelsene, det vil si førsteordensbetingelsene samt bibetingelsen:

$$\mathcal{L}'_x = 8x - 2xy^2 - \lambda \cdot 2x = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = 18y - 2yx^2 - \lambda \cdot 2y = 0$$
$$x^2 + y^2 = 13$$

Vi løser disse likningene for å finne kandidatpunkter. De to første likningene gir

$$2x(4 - y^2 - \lambda) = 0$$
$$2y(9 - x^2 - \lambda) = 0$$

Den første likningen gir $x = 0$ eller $\lambda = 4 - y^2$, og den andre gir $y = 0$ eller $\lambda = 9 - x^2$. Hvis $x = 0$, så er $y = \pm\sqrt{13} \neq 0$ ved bibetingelsen, og $\lambda = 9$. Tilsvarende, hvis $y = 0$, så er $x = \pm\sqrt{13}$ ved bibetingelsen, og $\lambda = 4$. Dette gir kandidatpunkter

$$(x,y;\lambda) = (0, \pm\sqrt{13}; 9), (\pm\sqrt{13}, 0; 4)$$

Det gjenstående tilfellet er $x \neq 0$ og $y \neq 0$. Da er $\lambda = 9 - x^2 = 4 - y^2$, som gir $x^2 = y^2 + 5$. Setter vi dette inn i bibetingelsen, får vi $(y^2 + 5) + y^2 = 13$, eller $2y^2 = 8$. Dermed er $y^2 = 4$ og $x^2 = 9$. Vi får $x = \pm 3$ og $y = \pm 2$, og $x^2 = 9$, og dermed $\lambda = 0$. Vi får kandidatpunktene

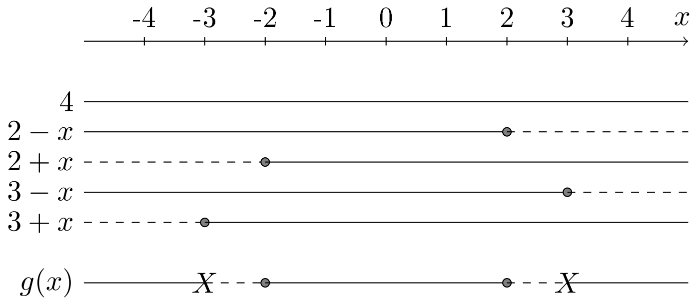
$$(x,y;\lambda) = (\pm 3, \pm 2; 0)$$

Vi regner ut funksjonsverdien i de seks kandidatpunktene: Vi har $f(0, \pm\sqrt{13}) = 9 \cdot 13 = 117$, $f(\pm\sqrt{13}, 0) = 4 \cdot 13 = 52$, og $f(\pm 3, \pm 2) = 36 + 36 - 36 = 36$. Det er ingen tillatte punkt med degenerert bibetingelse, siden $g'_x = g'_y = 0$ gir $2x = 2y = 0$, eller $(x,y) = (0,0)$, og dette punktet ligger ikke på sirkelen $x^2 + y^2 = 13$. Siden sirkelen er begrenset slik at det finnes et minimum, og det ikke er noen punkt på sirkelen med degenerert bibetingelse, så er kandidatpunktene $(x,y;\lambda) = (\pm 3, \pm 2; 0)$ minimumspunkt, og $f_{\min} = 36$.

Alternativt kan vi løse Lagrangeproblemet ved å bruke bibetingelsen til å skrive $y^2 = 13 - x^2$, og sette dette inn i $f(x,y)$. Vi ville da fått følgende minimumsproblem i én variabel uten bibetingelse:

$$\min 4x^2 + 9(13 - x^2) - x^2(13 - x^2) = \min x^4 - 18x^2 + 117$$

Dette kan vi løse ved sette opp fortegnsdiagram for den deriverte til uttrykket ovenfor, eller ved å bruke at $x^4 - 18x^2 + 117 = (x^2 - 9)^2 + 36$ ved fullføring av kvadratet.



d) Nivåkurven $f(x,y) = 16$ har likning $4x^2 + 9y^2 - x^2y^2 = 16$, og vi kan løse denne likningen for y:

$$y^2(9 - x^2) = 16 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{16 - 4x^2}{9 - x^2} = \frac{4(2-x)(2+x)}{(3-x)(3+x)}$$

Vi kaller uttrykket på høyre side for $g(x)$. Vi ser at hvis $g(x) < 0$, så har likningen ingen løsninger, hvis $g(x) = 0$ så har likningen en løsning med $y = 0$, og hvis $g(x) > 0$, så har likningen to løsninger $y = \pm\sqrt{g(x)}$. Fra fortegnsdiagrammet ovenfor ser vi at nivåkurven skjærer x-aksen i $x = \pm 2$, og at $g(x) > 0$ for $-2 < x < 2$, $x > 3$ og $x < -3$. Det betyr at når x er i et av disse intervallene, finnes det to y-verdier $y = \pm\sqrt{g(x)}$ slik at (x,y) ligger på nivåkurven $f(x,y) = 16$. Det finnes ingen punkter på nivåkurven med $-3 < x < 2$ eller $2 < x < 3$ siden $g(x) < 0$ i disse intervallene. Vi ser også at $x = -3$ og $x = 3$ er vertikale asymptoter for nivåkurven, siden $g(x) \to \pm\infty$ når $x \to 3$ eller $x \to -3$. Polynomdivisjon gir at

$$g(x) = \frac{16 - 4x^2}{9 - x^2} = 4 + \frac{-20}{9 - x^2}$$

Dermed har vi at $y^2 \to 4$ når $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$, og det betyr at $y = 2$ og $y = -2$ er horisontale asymptoter. Ved hjelp av disse opplysningen, skisserer vi nivåkurven $f(x,y) = 16$ nedenfor.