Løsning	MET 11806 Matematikk for siviløkonomer
Innleveringsfrist	20. mars 2020 kl 1200

Vi benytter maksimal score 6p på hver deloppgave og 144p totalt, og grensen for å bestå er ca 86p. Du kan selv fylle ut tabellen nedenfor med dine poeng og regne ut poengsum. Vi legger størst vekt på av valg av metode (begrunnet i teori hvis det ikke er opplagt), og gjennomføring av metode (at regningen er riktig). Vi legger ikke stor vekt på at svaret er riktig, og andre måter å skrive svaret på enn det som er brukt her kan gi full score. Vi trekker ikke for følgefeil.

Oppgave	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Total	Karakter	A	B	C	D	E
Poeng	24	12	12	18	18	18	24	6	12	144	Grenser	130	110	84	66	58
Score																

Oppgave 1. 24 P.

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$ 6 P.
(b) $\int \frac{1-x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2} - x^{-1}\,\mathrm{d}x = -x^{-1} - \ln|x| + C = -1/x - \ln|x| + C$ 6 P.
(c) $\int \frac{x^2}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int -x - 1 + \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 - x - \ln|1-x| + C$ 6 P.
(d) $\int 16(3-x)^7\,\mathrm{d}x = \int 16u^7 \cdot 1/(-1)\,\mathrm{d}u = -2u^8 + C = -2(3-x)^8 + C$ 6 P.

Oppgave 2. 12 P.

(a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 6 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & -11 \\ -1 & -2 & 6 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & -11 \\ 0 & -4 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

Så markerer vi pivotposisjonen i andre rad, og bruker den til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & -11 \\ 0 & -4 & 9 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er dermed en løsning, og vi finner den ved baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} 2z &= 2 & & & z &= 1 \\ 4y - 7z &= -11 &\Rightarrow\quad 4y &= -11 + 7(1) & y &= -1 \\ x - 2y + 3z &= 6 &\Rightarrow\quad x &= 6 + 2(-1) - 3(1) & x &= 1 \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (1,-1,1)$. 6 P.

(b) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 17 & 10 \\ 5 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 17 & 10 \\ 0 & -7 & -17 & -10 \end{array}\right)$$

Så markerer vi pivotposisjonen i andre rad, og bruker den til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 17 & 10 \\ 0 & -7 & -17 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 17 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er uendelig mange løsninger, med z fri siden z-kolonnen ikke har noen pivotposisjoner, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} 7y + 17z = 10 \quad &\Rightarrow \quad 7y = 10 - 17z & y &= 10/7 - 17z/7 \\ x + 2y + 4z = 5 \quad &\Rightarrow \quad x = 5 - 2(10/7 - 17z/7) - 4z & x &= 15/7 + 6z/7 \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (15/7 + 6z/7, 10/7 - 17z/7, z)$ der z er en fri variabel. 6 P.

Oppgave 3. 12 P.

a) Vi deriverer f og finner at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+3) - (\sqrt{x}+1) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{(x+3) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}(x+3)^2} \\ &= \frac{x + 3 - 2x - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+3)^2} = \frac{3 - 2\sqrt{x} - x}{2\sqrt{x}(x+3)^2} = \frac{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}{2\sqrt{x}(x+3)^2} \end{aligned}$$

For å finne faktoriseringen i teller, har vi satt $u = \sqrt{x}$, som gir $3 - 2\sqrt{x} - x = 3 - 2u - u^2$. Dette uttrykket har faktoriseringen $-(u-1)(u+3) = (1-u)(u+3) = (1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)$. Siden f er definert for $x \geq 0$, og alle faktorene i $f'(x)$ bortsett fra $1 - \sqrt{x}$ alltid er positive, er $f'(x) \geq 0$ i $[0,1]$ og $f'(x) \leq 0$ i $[1,\infty)$. Det betyr at f er voksende i $[0,1]$ og avtagende i $[1,\infty)$. 6 P.

b) Siden f er voksende i $[0,1]$ og avtagende i $[1,\infty)$, så har f et (globalt) maksimum i $x = 1$, og maksimumsverdien er $f_{\max} = f(1) = 2/4 = 1/2$. Vi har at $f(0) = 1/3$ og at $f(x) \to 0$ når $x \to \infty$. Derfor har f ingen globale minimumspunkt. 6 P.

Oppgave 4. 18 P.

(a) Vi regner ut determinanten til A ved å bruke kofaktorutvikling langs første rad, og får $|A| = 1(12+1) - 1(8-3) + 1(2+9) = 19$. Dermed har vi at

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 & -5 & 11 \\ -3 & 7 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -5 & 7 & 3 \\ 11 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad 6\text{ P.}$$

(b) Vi har at

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & -13 \\ 4 & 11 & 2 \\ -13 & 2 & 18 \end{pmatrix} \quad 6\text{ P.}$$

(c) Vi har at

$$\begin{aligned} E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A &= E_3 \cdot E_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = E_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \quad 6\text{ P.} \end{aligned}$$

Oppgave 5. 18 P.

(a) Siden $|x| = x$ for $x \geq 0$ og $|x| = -x$ for $x < 0$, har vi at

$$\int_{-1}^{1} |x| \, dx = \int_{-1}^{0} (-x) \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{0}^{1} = 0 + (1/2) + (1/2) - 0 = 1 \quad 6\text{ P.}$$

(b) Vi har at

$$\int_1^b \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^b x^{-3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^b = -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2}$$

Dermed er

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2} \quad 6\,\mathrm{P.}$$

(c) Substitusjon gir $\int x\,e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int e^{-u}\,\mathrm{d}u = -e^{-u} + C = -e^{-x^2/2} + C = F(x) + C$. Siden $F(-b) = F(b)$, har vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0 \quad 6\,\mathrm{P.}$$

Oppgave 6. 18 P.

(a) Determinanten er gitt ved

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3a-4) - 1(6-4) + a(2-a) = -a^2 + 5a - 6 = -(a-2)(a-3)$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $a = 2$ og $a = 3$, og det lineære systemet har eksakt en løsning når $a \neq 2, 3$. 6 P.

(b) Determinanten er gitt ved

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 1(a^2 - a) - 1(a - a^2) + 1(1 - a^2) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $a = 1$, og det lineære systemet har eksakt en løsning når $a \neq 1$. 6 P.

(c) Determinanten er gitt ved

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & -1 \\ t & -1 & t \end{vmatrix} = t(t^2-1) - 1(t+t) + t(-1-t^2) = -4t$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $t = 0$, og det lineære systemet har eksakt en løsning når $t \neq 0$. 6 P.

Oppgave 7. 24 P.

(a) Vi bruker delvis integrasjon med $u' = 5x\sqrt{x} = 5x^{3/2}$ og $v = \ln x$, som gir $u = 2x^{5/2} = 2x^2\sqrt{x}$ og $v' = 1/x$, og dermed at

$$\int 5x\sqrt{x}\,\ln(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2\sqrt{x}\,\ln(x) - \int 2x^{5/2}x^{-1}\,\mathrm{d}x = 2x^2\sqrt{x}\,\ln(x) - \int 2x^{3/2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2x^2\sqrt{x}\,\ln(x) - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + C \quad 6\,\mathrm{P.}$$

(b) Vi skriver integralet som $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ og bruker delvis integrasjon med $u' = e^{-x}$ og $v = x$, som gir $u = -e^{-x}$ og $v' = 1$, og dermed at

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x(-e^{-x}) - \int 1(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C \quad 6\,\mathrm{P.}$$

(c) Vi faktoriserer nevner som $4 - x^2 = (2+x)(2-x)$, og forenkler uttrykket ved delbrøksoppspaltning. Dette gir

$$\frac{2x+2}{4-x^2} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2 = A(2-x) + B(2+x)$$

Det vil si $2x + 2 = 2(A+B) + (B-A)x$, eller at $2(A+B) = 2$ og $B - A = 2$. Dette lineære systemet gir $B = 3/2$ og $A = -1/2$, og integralet blir dermed

$$\int \frac{2x+2}{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2}\frac{1}{2+x} + \frac{3}{2}\frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|2+x| - \frac{3}{2}\ln|2-x| + C \quad 6\,\mathrm{P.}$$

(d) Vi bruker substitusjonen $u = 1 - \sqrt{x}$, som gir $\mathrm{d}u = (-1/2)x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$, eller $\mathrm{d}x = -2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u$. Dette gir

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{x}}{u}(-2\sqrt{x})\,\mathrm{d}u = \int \frac{-2(\sqrt{x})^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{-2(1-u)^2}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{-2u^2+4u-2}{u}\,\mathrm{d}u = \int -2u+4-\frac{2}{u}\,\mathrm{d}u = -u^2+4u-2\ln|u|+C \\ &= -(1-\sqrt{x})^2+4(1-\sqrt{x})-2\ln|1-\sqrt{x}|+C = -x-2\sqrt{x}-2\ln|1-\sqrt{x}|+C\end{aligned}$$

I første linje har vi brukt at $u = 1-\sqrt{x}$, eller $\sqrt{x} = 1-u$. 6 P.

Oppgave 8. 6 P.

Vi regner først ut determinanten til koeffisientmatrisen A til det lineære systemet, ved å utvikle determinanten langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \\ 4 & t & 2 \end{vmatrix} = t(2-t^2) - 1(4-4t) + 1(2t-4) = 2t - t^3 - 4 + 4t + 2t - 4 = -t^3 + 8t - 8$$

Vi ser at $t = 2$ gir $|A| = 0$, og vi finner faktoriseringen

$$|A| = -(t^3 - 8t + 8) = -(t-2)(t^2+2t-4)$$

ved polynomdivisjon. Siden $t^2 + 2t - 4 = 0$ har løsningene

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

er $\det(A) = 0$ for $t_1 = 2$, $t_2 = -1+\sqrt{5} \approx 1.23$ og $t_3 = -1-\sqrt{5} \approx -3.23$. Dermed har systemet ingen eller uendelig mange løsninger for disse tre t-verdiene, og eksakt én løsning for alle andre verdier av t. Vi ser først på tilfellet $t = 2$, og løser systemet ved Gauss-eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at systemet har uendelig mange løsninger for $t = 2$, med y som fri variabel. Løsningene er gitt ved $z = 0$ og $2x + y + z = 2$, som gir $2x = 2 - y - z = 2 - y$, eller $x = 1 - y/2$. For $t = 2$ er altså løsningene gitt ved

$$(x,y,z) = (1-y/2, y, 0) \text{ der } y \text{ er en fri variabel}$$

Vi forsøker å undersøke de to andre t-verdiene $t = -1 \pm \sqrt{5}$ samtidig, ved å bruke Gauss-eliminasjon. Vi bytter først om på radene og multipliserer med 2 i siste rad:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t & t \\ 4 & t & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 4 & t & 2 & 4 \\ t & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 4 & t & 2 & 4 \\ 2t & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Så eliminerer vi koeffisientene under første and andre pivot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 4 & t & 2 & 4 \\ 2t & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 0 & t-2 & 2-2t & 4-2t \\ 0 & 2-t & 2-t^2 & 4-t^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & t & t \\ 0 & t-2 & 2-2t & 4-2t \\ 0 & 0 & 4-2t-t^2 & 8-2t-t^2 \end{array}\right)$$

Vi setter så inn $t = -1 \pm \sqrt{5}$. Da er $t - 2 \neq 0$ en pivot i andre rad, og $4 - 2t - t^2 = 0$ fordi de to t-verdiene er løsningene av $t^2 + 2t - 4 = 0$. Men $8 - 2t - t^2 \neq 0$, og systemet har derfor ingen løsninger for $t = -1 \pm \sqrt{5}$. Vi kan også se dette ved å sette inn tilnærmingsverdier for $t = -1 \pm \sqrt{5}$ og gjøre Gauss eliminasjon med tilnærmingsverdiene. For alle andre verdier enn $t = 2$ og $t = -1 \pm \sqrt{5}$ er det eksakt én løsning, og vi finner den ved hjelp av Kramers regel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ t & 1 & t \\ 4 & t & 2 \end{vmatrix} = -t^2 + 2t \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-t(t-2)}{-(t-2)(t^2+2t-4)} = \frac{t}{t^2+2t-4}$$

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & t \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2t^2 + 4t \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{-2t(t-2)}{-(t-2)(t^2+2t-4)} = \frac{2t}{t^2+2t-4}$$

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t \\ 4 & t & 4 \end{vmatrix} = -t^3 + 12t - 16 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{-(t-2)^2(t+4)}{-(t-2)(t^2+2t-4)} = \frac{(t-2)(t+4)}{t^2+2t-4}$$

For å forenkle uttrykket for z, har vi brukt at $-t^3+12t-16$ har et nullpunkt i $t = 2$, og polynomdivisjon gir $-t^3 + 12t - 16 = (t-2)(-t^2 - 2t + 8) = -(t-2)^2(t+4)$. 6 P.

Oppgave 9. 12 P.

a) Vi undersøker om $\mathbf{v}_4$ er en lineærkombinasjon av de første tre vektorene ved å løse vektorlikningen $\mathbf{v}_4 = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$. Dette gir et lineært likningssystem med følgende utvidede matrise, og vi starter Gauss-prosessen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -3 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 10 \\ 0 & -8 & -3 & 13 \end{array}\right)$$

I den siste radoperasjonen bytter vi om andre og tredje rad. Vi fullfører så Gauss-prosessen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 10 \\ 0 & -8 & -3 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & -19 & -19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at det lineære systemet har en løsning, og $\mathbf{v}_4$ er derfor en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Vi finner løsningen til det lineære systemet, som er gitt ved

$$\begin{aligned} -18z &= -18 & & & z &= 1 \\ -y + 2z &= 4 & \Rightarrow \quad -y &= 4 - 2(1) & y &= -2 \\ x + 3y + 2z &= 1 & \Rightarrow \quad x &= 1 - 3(-2) - 2(1) & x &= 5 \end{aligned}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (5,-2,1)$, og det betyr at $\mathbf{v}_4 = 5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. 6 P.

b) Siden vektoren $\mathbf{v}_4 = 5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ er en lineærkombinasjon av de andre kolonnevektorene i A, så er $|A| = 0$. Det betyr at

$$\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A) = 0 \qquad 6\,\text{P.}$$