

MET 11806

Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	18.10.2019	Kl. 09:00
Innlevering:	25.10.2019	Kl. 12:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Vi benytter maksimal score 6p på hver deloppgave og 144p totalt, og grensen for å bestå er ca 86p. Du kan selv fylle ut tabellen nedenfor med dine poeng og regne ut poengsum. Vi legger størst vekt på av valg av metode (begrunnet i teori hvis det ikke er opplagt), og gjennomføring av metode (at regningen er riktig). Vi legger ikke stor vekt på at svaret er riktig, og andre måter å skrive svaret på enn det som er brukt her kan gi full score. Vi trekker ikke for følgefeil.

Oppgave	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Total	Karakter	A	B	C	D	E
Poeng	24	12	18	24	18	30	6	12	144	Grenser	130	110	84	66	58
Score															

Oppgave 1.

24 P.

- (a) $\int 14x^2\sqrt{x} dx = \int 14x^{5/2} dx = 14(2/7)x^{7/2} + C = 4x^3\sqrt{x} + C.$
- (b) $\int 2/x^{3/2} dx = \int 2x^{-3/2} dx = 2(-2)x^{-1/2} = -4/\sqrt{x} + C$
- (c) $\int 4x(4 - x^2) dx = \int 16x - 4x^3 dx = 8x^2 - x^4 + C$
- (d) $\int 16(1 + 2x)^3 dx = \int 16u^3 \cdot 1/2 du = 2u^4 + C = 2(1 + 2x)^4 + C$

Oppgave 2.

12 P.

- (a) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 20 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Så markerer vi pivotposisjonen i andre rad, og bruker den til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er dermed [en løsning](#), og vi finner den ved baklengs substitusjon:

$$\begin{array}{rcl} 2z = 8 & & z = 4 \\ -2y + 3z = 8 & \Rightarrow & -2y = 8 - 3(4) & y = 2 \\ x + 2y - z = 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2(2) + (4) & x = 3 \end{array}$$

Løsningen er altså $(x,y,z) = (3,2,4)$.

- (b) Vi skriver ned den utvidede matrisen til systemet, markerer første pivot-posisjon, og gjør elementære radoperasjoner som bruker første pivot til å eliminere tallene i posisjonene under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 18 \\ 3 & 6 & 8 & 29 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 29 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

Så markerer vi pivotposisjonen i andre rad, og bruker den til å eliminere tallet i posisjonen under:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Resultatet er en trappeform, hvor vi har markert alle pivotposisjoner. Det er dermed [uendelig mange løsninger](#), med y fri siden y -kolonnen ikke har noen pivotposisjoner, og vi finner løsningene ved baklengs substitusjon:

$$\begin{array}{rcl} -4z = -4 & & z = 1 \\ x + 2y + 4z = 11 & \Rightarrow & x = 11 - 2y - 4(1) & x = 7 - 2y \end{array}$$

Løsningen er altså $(x, y, z) = (7 - 2y, y, 1)$ der y er en fri variabel.

Oppgave 3.

18 P.

(a) Vi har at

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Vi regner ut determinanten til A ved å bruke kofaktorutvikling langs første rad, og får $|A| = 1(-2) - 1(2) = -4$. Dermed har vi at

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Vi har at

$$\begin{aligned} AB + BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oppgave 4.

24 P.

(a) Vi bruker substitusjonen $u = 1 + e^{-x}$, som gir $du = u' dx = -e^{-x} dx$. Dette gir

$$\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int \frac{e^{-x}}{u} \frac{du}{-e^{-x}} = \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln(1 + e^{-x}) + C$$

(b) Vi faktoriserer nevner som $4 - 9x^2 = (2 + 3x)(2 - 3x)$, og forenkler uttrykket ved delbrøksopp-spaltning. Dette gir

$$\frac{6 + 3x}{4 - 9x^2} = \frac{A}{2 + 3x} + \frac{B}{2 - 3x} \Rightarrow 6 + 3x = A(2 - 3x) + B(2 + 3x)$$

Det vil si $6 + 3x = (2A + 2B) + (3B - 3A)x$, eller at $A + B = 3$ og $B - A = 1$. Dette lineære systemet gir $B = 2$ og $A = 1$, og integralet blir dermed

$$\begin{aligned} \int \frac{6 + 3x}{4 - 9x^2} dx &= \int \frac{1}{2 + 3x} + \frac{2}{2 - 3x} dx = 1 \cdot \frac{1}{3} \ln|2 + 3x| + 2 \cdot \frac{1}{(-3)} \ln|2 - 3x| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|2 + 3x| - \frac{2}{3} \ln|2 - 3x| + C \end{aligned}$$

(c) Vi kan skrive $3 \ln x / x^2 = 3 \ln x \cdot x^{-2}$ og bruke delvis integrasjon med $u' = x^{-2}$ og $v = 3 \ln x$, som gir $u = -1/x$ og $v' = 3/x$. Dermed får vi

$$\int \frac{3 \ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \cdot 3 \ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{3}{x} dx = \frac{-3 \ln x}{x} + 3 \int x^{-2} dx = \frac{-3 \ln x - 3}{x} + C$$

(d) Vi bruker substitusjonen $u = -\sqrt{x} = -x^{1/2}$, som gir $du = u' dx = (-1/2)x^{-1/2} dx$. Dette gir

$$\begin{aligned} \int 3e^{-\sqrt{x}} dx &= \int 3e^u \frac{du}{(-1/2)x^{-1/2}} = \int -6x^{1/2} e^u du = \int 6ue^u du \\ &= 6ue^u - \int 6e^u du = 6ue^u - 6e^u + C = (-6\sqrt{x} - 6)e^{-\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

Overgangen fra første til andre linje er ved delvis integrasjon.

Oppgave 5.

18 P.

- (a) Determinanten er gitt ved

$$|A| = \begin{vmatrix} 6a & 2 \\ 1 & 3a \end{vmatrix} = 18a^2 - 2 = 2(9a^2 - 1) = 2(3a - 1)(3a + 1)$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $a = \pm 1/3$.

- (b) Vi regner ut determinanten ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & s \\ 3 & s & 9 \\ 2 & 1 & s \end{vmatrix} = 1(s^2 - 9) - 1(3s - 18) + s(3 - 2s) = -s^2 + 9 = (3 - s)(3 + s)$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $s = \pm 3$.

- (c) Vi regner ut determinanten ved kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} t & 2 & 5 \\ 2 & t & 5 \\ 2 & 5 & t \end{vmatrix} = t(t^2 - 25) - 2(2t - 10) + 5(10 - 2t) = (t - 5)(t(t + 5) - 4 - 10) \\ &= (t - 5)(t^2 + 5t - 14) = (t - 5)(t - 2)(t + 7) \end{aligned}$$

Vi har dermed at $|A| = 0$ når $t = 2, t = 5, t = -7$.

Oppgave 6.

30 P.

- (a) Polynomdivisjon gir $f(x) = x - 6/(x^2 - 1)$, og dermed har f en skrå asymptote L med likning $y = x$.
 (b) Siden $f(x) = x - 6(x^2 - 1)^{-1}$, så er den deriverte gitt ved

$$f'(x) = 1 - 6(-1)(x^2 - 1)^{-2} \cdot 2x = 1 + \frac{12x}{(x^2 - 1)^2}$$

Det betyr at $f'(x) > 0$ når $x > 1$, og f er en **voksende funksjon**.

- (c) Vi har at $f(x) = 0$ når telleren $x^3 - x - 6 = 0$, siden nevneren $x^2 - 1 \neq 0$ for $x > 1$. Vi faktorerer telleren ved å se at $x = 2$ er et nullpunkt, og polynomdivisjon gir

$$(x^3 - x - 6) : (x - 2) = x^2 + 2x + 3$$

Vi får at $x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$ gir nullpunktet $x = 2$, siden andregradspolynomet $x^2 + 2x + 3$ ikke har nullpunkter.

- (d) Vi deriverer uttrykket for $f'(x)$ for å finne $f''(x)$, og får at

$$f''(x) = \frac{12(x^2 - 1)^2 - 12x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12(x^2 - 1) - 48x^2}{(x^2 - 1)^3} = \frac{-36x^2 - 12}{(x^2 - 1)^3}$$

Siden $x > 1$ er nevneren positiv, og dermed er $f''(x) < 0$ for $x > 1$. Dette betyr at f er **konkav** (i hele definisjonsområdet).

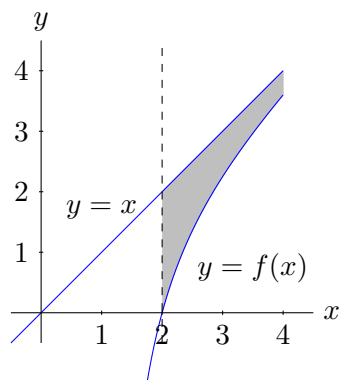
- (e) Figur er vist nedenfor, med hjelpelinjen $x = 2$ tegnet inn. Arealet av området R er gitt ved

$$A = \int_2^\infty x - f(x) \, dx = \int_2^\infty \frac{6}{x^2 - 1} \, dx = \int_2^\infty \frac{3}{x - 1} - \frac{3}{x + 1} \, dx = \left[3 \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) \right]_2^\infty$$

Siden vi har at

$$\left[\ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) \right]_2^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{b - 1}{b + 1} \right) - \ln \left(\frac{1}{3} \right) \right) = \ln(1) - \ln(3^{-1})$$

er arealet av området R gitt ved $A = 3(\ln(1) + \ln(3)) = 3 \ln 3$.



Oppgave 7.

6 P.

Vi regner først ut determinanten til koeffisientmatrisen A til det lineære systemet, ved å utvikle determinanten langs siste rad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ -1 & 2 & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4+a) - a(-2-a^2) - 1(1-2a) = 8 + 2a + 2a + a^3 - 1 + 2a = a^3 + 6a + 7$$

Vi ser at $|A| = 0$ for $a = -1$, og bruker dette til å finne faktoriseringen

$$|A| = a^3 + 6a + 7 = (a+1)(a^2 - a + 7)$$

ved polynomdivisjon. Det eneste nullpunktet er $a = -1$, siden $a^2 - a + 7$ ikke har nullpunkt. Dermed er det **én løsning** for $a \neq -1$. For $a = -1$ løser vi systemet ved Gauss eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Vi ser at systemet har **uendelig mange løsninger** for $a = -1$. Antall løsninger er dermed gitt ved

$$\begin{cases} \text{uendelig mange løsninger,} & a = -1 \\ \text{eksakt én løsning,} & a \neq -1 \end{cases}$$

Vi finner så løsningene for $a = -1$ ved å bruke trappeformen vi fant over. Den gir at z er fri, og at

$$3y - 3z = 0 \Rightarrow y = z \quad \text{og} \quad -x + 2y - z = 0 \Rightarrow x = 2y - z = 2z - z = z$$

Dette gir løsninger $(x,y,z) = (z,z,z)$ med z fri i tilfellet $a = -1$ med uendelig mange løsninger.

Oppgave 8.

12 P.

(a) Nåverdien av konstantstrømmen fra leie er

$$\begin{aligned} \int_0^\infty I(t)e^{-rt} dt &= \int_0^\infty I_0 e^{0.06t} e^{-0.10t} dt = \int_0^\infty I_0 e^{-0.04t} dt = \left[\frac{I_0}{-0.04} e^{-0.04t} \right]_0^\infty \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{I_0}{-0.04} e^{-0.04t} \right]_0^b = \frac{I_0}{-0.04} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-0.04b} - 1) = \frac{I_0}{0.04} = 25I_0 \end{aligned}$$

Altså er nåverdien av konstantstrømmen fra leie 150 millioner kroner når $25I_0 = 150$, som gir $I_0 = 6$.

(b) La $S(t)$ være nåverdien av salgssummen om vi selger eiendommen etter t år. Da har vi at

$$S(t) = V(t)e^{-rt} = 150 e^{\sqrt{t}/4} e^{-0.10t} = 150 e^{(5\sqrt{t}-2t)/20}$$

For å finne ut når $S(t)$ er maksimal, deriverer vi denne funksjonen. Vi bruker $u = (5\sqrt{t}-2t)/20$ som kjerne, og får

$$S'(t) = 150 e^u \cdot u' = 150 e^u \cdot \frac{1}{20} \left(\frac{5}{2\sqrt{t}} - 2 \right) = 7.5 e^u \cdot \frac{5 - 4\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$$

Dermed er $S'(t) = 0$ når $5 - 4\sqrt{t} = 0$, og dette gir $\sqrt{t} = 5/4$, eller $t = 25/16 = 1.5625$. De andre faktorene i uttrykket for $S'(t)$ er positive, og $5 - 4\sqrt{t}$ skifter fortegn fra å være positivt

til å bli negativt i $t = 25/16$. Dermed er $t = 25/16$ globalt maksimum for funksjonen $S(t)$. Vi kan også se dette ved å sette opp fortegnsskjema for $S'(t)$. Nåverdien av salgssummen er altså **største mulig etter $T = 1.5625$ år**, eller 18.75 måneder. Samlet nåverdi fra kontantstrøm for leie L og salg S , dersom vi selger etter $T = 25/16$ år, er gitt ved

$$L = \int_0^T I(t)e^{-rt} dt = \int_0^T 5e^{-0.04t} dt = \left[\frac{5}{-0.04} e^{-0.04t} \right]_0^T = \frac{5(1 - e^{-1/16})}{0.04} \approx 7.573$$

$$S = 150e^{(5\sqrt{T}-2T)/20} = 150e^{5/32} \approx 175.368$$

Samlet nåverdi er dermed $L + T \approx 182.9$ millioner kroner.