SENSORVEILEDNING - Hjemmeeksamen

MET 11805
Matematikk for siviløkonomer

Institutt for Samfunnsøkonomi

Utlevering:	10.12.2020	Kl. 14:00
Innlevering:	10.12.2020	Kl. 17:00

For mer informasjon om formalia, se eksamensoppgaven.

Hjemmeeksamen i MET1180[1] - Matematikk for siviløkonomer

10. desember 2020

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

$$
\begin{array}{l}
\big(\;\; 6x^3+23x^2+19x+14\big):\big(x+3\big)=6x^2+5x+4+\dfrac{2}{x+3} \\
\underline{-6x^3-18x^2} \\
\qquad\quad 5x^2+19x \\
\qquad \underline{-5x^2-15x} \\
\qquad\qquad\qquad 4x+14 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-4x-12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; 2
\end{array}
$$

Resten er altså $\underline{\underline{2}}$.

Oppgave 2

Hvis r er internrenten er nåverdien av kontantstrømmen $-25+\frac{50}{e^{5r}}=0$. Det gir likningen $e^{5r}=\frac{50}{25}=2$, dvs $r=\underline{\underline{\frac{\ln 2}{5}}}=\underline{\underline{13{,}86\%}}$.

Oppgave 3

Ved kjerneregelen med $u(p)=-0{,}2p$ får vi $D'(p)=-0{,}2\cdot D(p)$ og dermed at elastisitetsfunksjonen er

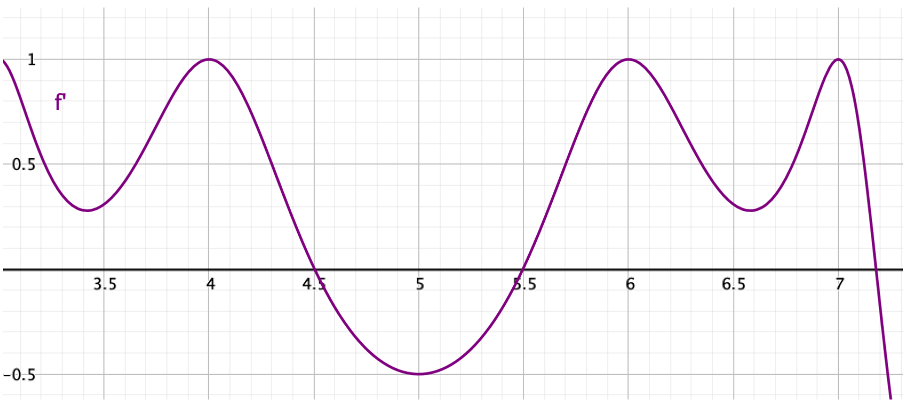
$$\varepsilon(p)=\frac{D'(p)\cdot p}{D(p)}=\frac{-0{,}2\cdot D(p)\cdot p}{D(p)}=-0{,}2p$$

Etterspørselen er *elastisk* for de priser p slik at $\varepsilon(p)<-1$, dvs $-0{,}2p<-1$, dvs $\underline{\underline{p>5}}$.

Etterspørselen er *uelastisk* for de priser p slik at $\varepsilon(p)>-1$, dvs $\underline{\underline{0<p<5}}$.

Etterspørselen er *nøytralelastisk* for prisen p slik at $\varepsilon(p)=-1$, dvs $\underline{\underline{p=5}}$.

Oppgave 4



Figur 1: Grafen til $f'(x)$

[1] Eksamenskode MET11805

(A) $f(x)$ *har tre stasjonære punkter* er riktig fordi et nullpunkt for $f'(x)$ er et stasjonært punkt for $f(x)$ og vi teller tre nullpunkter for $f'(x)$.
(B) $f(x)$ *er konveks i intervallet* $[5\,,6]$ er rigtig fordi $f(x)$ er konveks for de x slik at $f''(x) \geqslant 0$ som stemmer fordi vi ser at stigningstallet til tangenten til grafen til $f'(x)$, dvs $f''(x)$, er større eller lik 0 i intervallet.
(C) $f(x)$ *er konveks i intervallet* $[4{,}5\;,\;5{,}5]$ er ikke riktig fordi stigningstallet til tangenten til grafen til $f'(x)$, dvs $f''(x)$, er negativ for x mellom 4,5 og 5.
(D) $f(x)$ *er voksende i intervallet* $[6\,,7]$ er riktig fordi $f'(x)$ er positiv for alle x i intervallet.

Oppgave 5

Hvis et produkt av tre tall er lik 0 må minst en av faktorene være 0. Dvs $x^2 - 5 = 0$ som gir $x = \pm\sqrt{5}$ eller $e^x - 2 = 0$ som gir $x = \ln(2)$, eller $\ln(x) = 0$ som gir $x = e^0 = 1$. Men $\ln(x)$ er bare definert for positive x og det samme gjelder derfor likningen. Dermed er x enten lik $\underline{\underline{\sqrt{5}}}$, $\underline{\underline{\ln(2)}}$, eller $\underline{\underline{1}}$.

Oppgave 6

Hvis du hver måned i 10 år betaler 5000 inn på en konto med 0,2% månedsrente (dvs 2,4% nominell rente og månedlig forrentning) med første innbetaling i dag så vil summen representere fremtidsverdien til kontantstrømmen (dvs saldo) om 10 år. Den månedlige vekstfaktoren er $1 + 0{,}2\% = 1{,}002$ og $5000 \cdot 1{,}002^n$ representerer fremtidsverdien til innbetaling nr. $(121 - n)$.

Oppgave 7

For å finne funksjonsuttrykket $g(x)$ løser vi først likningen $y = \ln(x-1)$ for x. For å få $x - 1$ «ut» av ln setter vi venstre og høyre side av likningen inn i $e^{(-)}$. Det gir $e^y = e^{\ln(x-1)} = x - 1$, dvs $x = e^y + 1$. Så bytter vi variabler og får $\underline{\underline{g(x) = e^x + 1}}$.

Fordi $f(x) = \ln(x-1)$ er (strengt) voksende vil den minste verdien være $f(2) = \ln(1) = 0$. Fordi $f(x)$ vokser uten øvre begrensning ($\lim_{x\to\infty} \ln(x-1) = \infty$) og er kontinuerlig vil $V_f = [0\,,\infty\rangle$. (Alternativt argument: likningen $f(x) = c$ har løsninger for x i intervallet $D_f = [2\,,\infty\rangle$ for alle $c \geqslant 0$, nemlig $x = e^c + 1$). Generelt gjelder $D_g = V_f$. Derfor er $\underline{\underline{D_g = [0\,,\infty\rangle}}$.

Oppgave 8

Hyperbelfunksjonen kan skrives på standardformen $f(x) = c + \frac{a}{x-b}$ hvor $b = 5$ og $c = 100$, dvs $f(x) = 100 + \frac{a}{x-5}$. Fra $f(6) = 112$ får vi derfor likningen $100 + \frac{a}{6-5} = 112$, dvs $a = 12$ og $f(x) = 100 + \frac{12}{x-5}$. Dermed får vi $f(17) = 100 + \frac{12}{17-5} = \underline{\underline{101}}$.

Oppgave 9

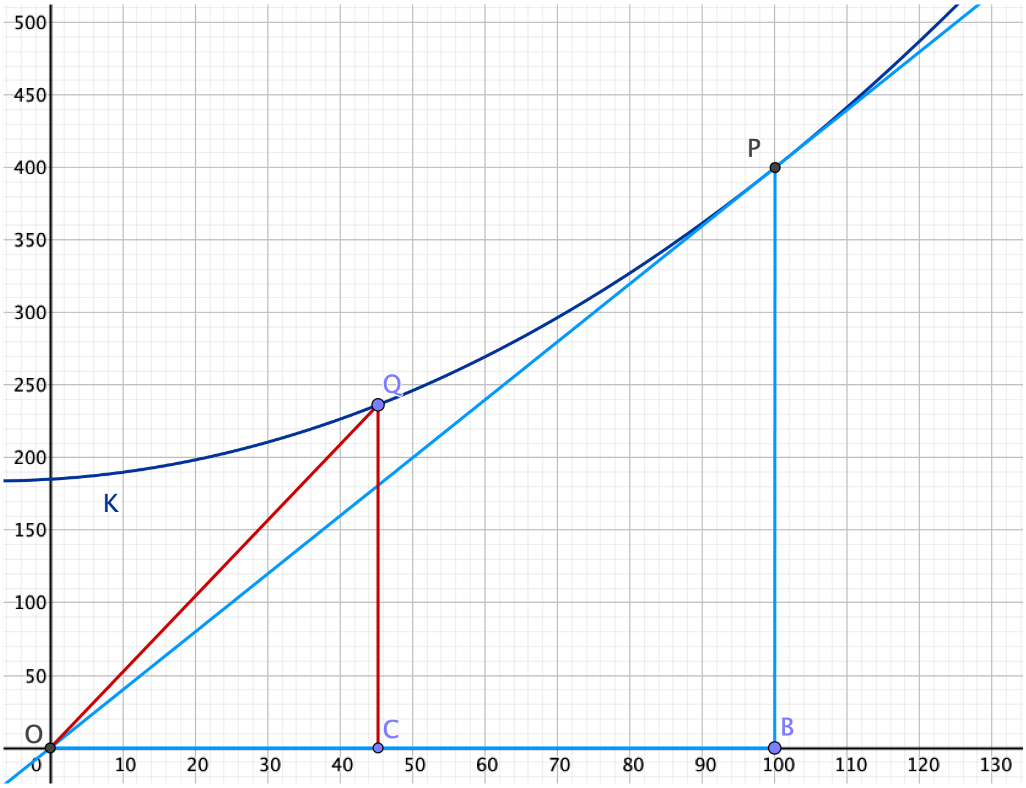
Kjerneregelen for derivasjon av sammensatte funksjoner sier at $f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$. Dvs at $f'(12) = g'(u(12)) \cdot u'(12) = g'(52) \cdot u'(12) = 32 \cdot (-0{,}1) = \underline{\underline{-3{,}2}}$.

Oppgave 10

Taylorpolynomet av andre grad til $f(x)$ i 30 er $P_2(x) = 700 + 5(x-30) - 0{,}5(x-30)^2$. Dermed er $f(31) \approx P_2(31) = \underline{\underline{704{,}5}}$.

Oppgave 11

I figur 2 ser du grafen til kostnadsfunksjonen med tangenten gjennom origo og et ikke-optimalt punkt Q.



Figur 2: Kostnadsfunksjonen $K(x)$

Når kostnadsfunksjonen er strengt konveks ($K''(x) > 0$) slik som her, vil den tangenten til kostnadsfunksjonen som går gjennom origo ha minimal enhetskostnad som stigningstall og x-koordinaten til tangeringspunktet vil være kostnadsoptimum. Vi ser at punktet $P = (100\,,400)$ tilnærmet er dette tangeringspunktet, derfor er minimal enhetskostnad lik $\frac{400}{100} = \underline{\underline{4}}$ og kostnadsoptimum er gitt ved $\underline{\underline{x = 100}}$.

Ved et resultat i kurset er kostnadsoptimum løsningen på likningen $K'(x) = A(x)$ hvor $A(x) = \frac{K(x)}{x}$ er gjennomsnittlig enhetskostnad for x produserte enheter. Tangentmetoden for å finne minimal enhetskostnad fungerer dermed fordi stigningstallet til tangenten som går gjennom origo både er $K'(100)$ og $\frac{K(100)}{100} = A(100)$. Vi ser også at linjen gjennom origo og et et annet punkt Q på grafen til $K(x)$ har høyere stingningstall. Dermed er $x = 100$ kostnadsoptimum.

Oppgave 12

Standardformen for ellipselikningen gir

$$\frac{(x-3)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y-4)^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$$

Ved å multiplisere begge sider av likningen med $(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{6})^2 = 3 \cdot 6 = 18$ får vi likningen

$$6(x-3)^2 + 3(y-4)^2 = 18 \qquad \text{dvs} \qquad 6x^2 - 36x + 54 + 3y^2 - 24y + 48 = 18$$

Vi deriverer begge sider av likningen med hensyn på x og får (ved bl.a. kjerneregelen)

$$12x - 36 + 6yy' - 24y' = 0$$

som vi løser for y' og får $6(y-4)y' = 12(3-x)$, dvs

$$y' = \frac{12(3-x)}{6(y-4)} = \frac{2(3-x)}{(y-4)}$$

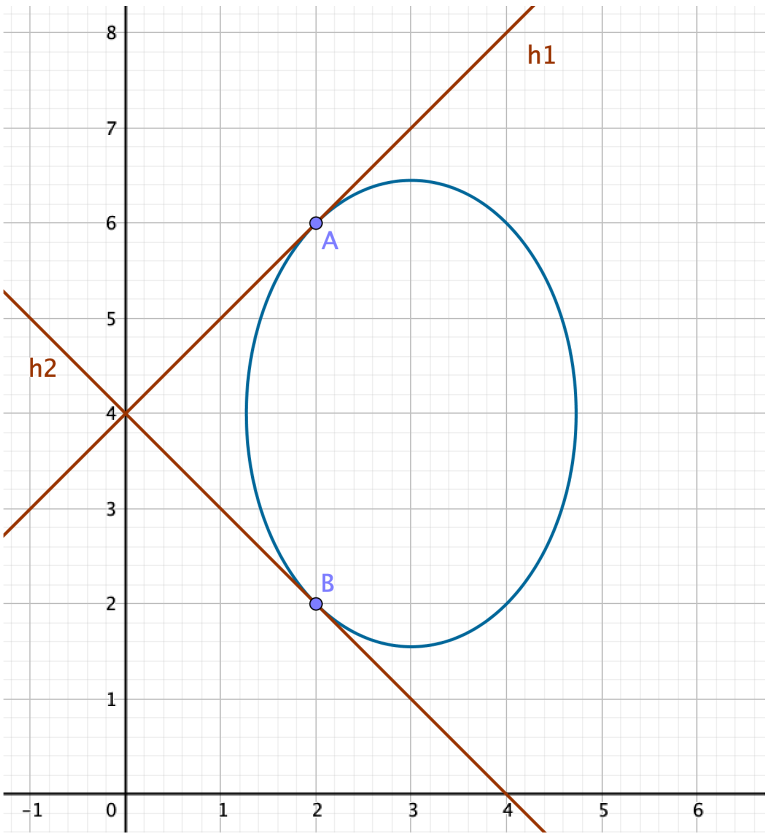
Når $x = 2$ får vi fra ellipselikningen at $\frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{6} = 1$, dvs $(y-4)^2 = 6(1-\frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Dermed er $y = 4 \pm 2$, dvs $y = 6$ eller $y = 2$.

For punktet $(2,6)$ har vi stigningstallet $y' = \frac{2(3-2)}{(6-4)} = 1$ for tangentfunksjonen $h_1(x)$. Ettpunktspunktformelen gir da at

$$h_1(x) - 6 = 1 \cdot (x-2) \qquad \text{dvs} \qquad \underline{\underline{h_1(x) = x + 4}}$$

For punktet $(2,2)$ har vi at stigningstallet $y' = \frac{2(3-2)}{(2-4)} = -1$ for tangentfunksjonen $h_2(x)$. Ettpunktspunktformelen gir da at

$$h_2(x) - 2 = (-1) \cdot (x-2) \qquad \text{dvs} \qquad \underline{\underline{h_2(x) = -x + 4}}$$



Figur 3: Ellipsen med to de tangentene for $x = 2$