Løsning	MET 11803 Matematikk
Dato	15. desember 2015 kl 0900 - 1400

Oppgave 1.

(a) Dersom vi selger eiendommen etter t år, med $t > 0$, så er nåverdien av salgssummen

$$N(t) = V(t)e^{-rt} = 120\,e^{\sqrt{t}/5}e^{-rt} = 120e^{\sqrt{t}/5-rt}$$

med $r = 0{,}04$. Da får vi

$$N'(t) = 120e^{\sqrt{t}/5-rt}\cdot\left(\frac{1}{5}\frac{1}{2\sqrt{t}} - r\right)$$

Vi har $N'(t) = 0$ når $\sqrt{t} = 1/(10r) = 1/0{,}4 = 2{,}5$. Det gir at $t = 2{,}5^2 = 6{,}25$. Vi ser også at $N'(t) > 0$ når $t < 6{,}25$, og $N'(t) < 0$ når $t > 6{,}25$. Dermed gir $t = 6{,}25$ maksimum for $N(t)$, og det optimale salgstidspunktet er etter 6,25 år.

(b) Vi har at $V(T) = 2V(0) = 240$, og dette gir

$$V(T) = 120\,e^{\sqrt{T}/5} = 240 \quad\Rightarrow\quad e^{\sqrt{T}/5} = 2$$

og dermed $\sqrt{T} = 5\ln(2)$ og $T = (5\ln 2)^2 \approx 12{,}0$. Det tar altså ca 12 år før verdien har er det dobbelte. Den har videre økt til det dobbelte av 240, altså 480, når

$$V(t) = 120\,e^{\sqrt{t}/5} = 480 \quad\Rightarrow\quad e^{\sqrt{t}/5} = 4$$

og dermed $\sqrt{t} = 5\ln(4) = 5\ln(2^2) = 10\ln 2$ og $t = (10\ln 2)^2 = 2^2T = 4T \approx 48{,}0$. Det tar altså $4T - T = 3T \approx 36$ år til før verdien har doblet seg igjen.

Oppgave 2.

(a) Vi løser $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ ved substitusjonen $u = 1-x^2$, som gir $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ og dermed

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int xe^u\frac{1}{-2x}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int e^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^u + \mathcal{C} = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + \mathcal{C}$$

(b) Vi løser $\int x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ ved delvis integrasjon, og velger $u' = x$ og $v = \ln(1-x)$, som gir $u = x^2/2$ og $v' = -1/(1-x)$. Dermed får vi

$$\int x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(1-x) - \int -\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(1-x) + \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Ved polynomdivisjon har vi at

$$\frac{x^2}{1-x} = -1-x+\frac{1}{1-x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{x^2}{1-x}\,\mathrm{d}x = -x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1-x)+\mathcal{C}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\ln(1-x) + \frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1-x)\right)+\mathcal{C}\\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(1-x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \mathcal{C}\end{aligned}$$

(c) Vi løser dette integralet ved å først bruke polynomdivisjon og deretter delbrøksoppspaltning. Polynomdivisjon gir at

$$\frac{x^3+x^2-2x-6}{x^2-1} = x+1+\frac{-x-5}{x^2-1}$$

Delbrøksoppspaltning av siste ledd, med nevner $(x-1)(x+1)$, gir oss at

$$\frac{-x-5}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \quad\leftarrow\quad -x-5 = A(x+1)+B(x-1)$$

Når vi setter inn $x = 1$ i siste likning, får vi $2A = -6$, eller $A = -3$. Når vi setter inn $x = -1$ i siste likning, får vi $-2B = -4$, eller $B = 2$. Dette gir

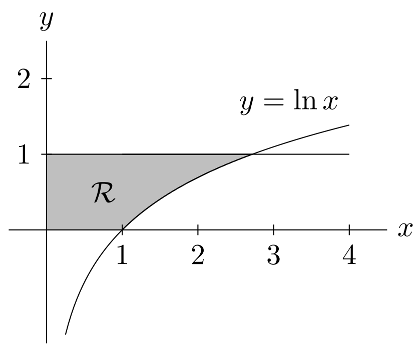
$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x^2 - 2x - 6}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x &= \int \left(x + 1 + \frac{-3}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - 3\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + \mathcal{C} \end{aligned}$$

(d) Regionen R er skissert nedenfor. Vi har at $y = \ln x$ skjærer $y = 0$ når $x = 1$, og den skjærer $y = 1$ når $x = e$. Derfor er regionen avgrenset av $y = 1$ og $y = 0$ når $0 \le x \le 1$, og denne delen av R har areal $A_1 = 1 \cdot 1 = 1$. Når $1 \le x \le e$, så er R avgrenset av $y = \ln x$ og $y = 1$. Denne delen av R har areal

$$A_2 = \int_1^e 1 - \ln x \, \mathrm{d}x = [x - (x \ln x - x)]_1^e = [2x - x \ln x]_1^e = 2e - e - 2 + 0 = e - 2$$

siden $\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot (1/x) \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + \mathcal{C}$ ved delvis integrasjon. Arealet av regionen R er derfor

$$A = A_1 + A_2 = 1 + (e - 2) = e - 1 \approx 1{,}72$$



OPPGAVE 3.

(a) Vi utvikler $|A|$ langs første kolonne:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} &= a(a^2 - 4) - 2(2a - 4) + 2(4 - 2a) = a(a^2 - 4) + 16 - 8a \\ &= a(a-2)(a+2) + 8(2-a) = (a-2) \cdot [a(a+2) - 8] = (a-2)(a^2 + 2a - 8) \\ &= (a-2)(a-2)(a+4) = (a-2)^2(a+4) \end{aligned}$$

Svaret kan også skrives $|A| = a^3 - 12a + 16$.

(b) For $a = 0$ er $|A| = 16$ fra forrige deloppgave, og kofaktormatrisen er gitt ved

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Siden kofaktormatrisen er symmetrisk, er den adjungerte matrisen lik kofaktormatrisen, og den inverse matrisen blir

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Vi har at $|A| = 0$ for $a = 2$ og $a = -4$, og $|A| \neq 0$ ellers. Det betyr at det er eksakt en løsning for $a \neq 2, -4$, og enten ingen løsning eller uendelig mange løsninger i tilfellene $a = 2, -4$. For $a = 2$ er det lineære systemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ved Gauss-eliminasjon. Vi ser at y og z er frie variabler, og at $2x + 2y + 2z = 2$, som gir $x = 1 - y - z$. Det er altså uendelig mange løsninger for $a = 2$:

$$x = 1 - y - z, \quad y{,}z \text{ er frie variable}$$

For $a = -4$ blir det lineære systemet

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ved Gauss-eliminasjon. Vi ser at z er en fri variabel, $-6y + 6z = -6$ gir $y = z + 1$, og $2x - 4y + 2z = -4$ gir $2x = 4(z + 1) - 2z - 4 = 2z$, og dermed $x = z$. Det er altså uendelig mange løsninger for $a = -4$ også:

$$x = z, \ y = z + 1, \quad z \text{ er en fri variabel}$$

(d) Når $a \neq 2, -4$ så er $|A| \neq 0$, og det er derfor en entydig løsning som vi kan finne ved Cramers regel. Vi regner først ut $|A_i(\mathbf{b})|$ for $i = 1{,}2{,}3$ når $a = 1$:

$$|A_1(\mathbf{b})| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2(\mathbf{b})| = \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = |A|, \quad |A_3(\mathbf{b})| = \begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & a \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Den første og siste determinanten er null siden matrisene har to like kolonner og den andre determinanten er lik $|A|$ siden matrisen $A_2(\mathbf{b}) = A$. Dermed gir Cramers regel at

$$x = \frac{0}{|A|} = 0, \quad y = \frac{|A|}{|A|} = 1, \quad z = \frac{0}{|A|} = 0$$

siden $|A| \neq 0$. Løsningen er altså $x = 0, \ y = 1, \ z = 0$ for alle $a \neq 2, -4$.

Oppgave 4.

(a) Vi har at $f'_x = 2xy + y^3 + y^2$ og $f'_y = x^2 + 3xy^2 + 2xy$, og de stasjonære punktene for f er gitt ved

$$f'_x = 2xy + y^3 + y^2 = 0, \quad f'_y = x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0$$

Dette gir $y(2x + y^2 + y) = 0$ og $x(x + 3y^2 + 2y) = 0$. Hvis $y = 0$ i første likning, så gir andre likning at $x = 0$. Hvis $x = 0$ i andre likning så gir første likning at $y = 0$ eller $y^2 + y = 0$. Dette gir $y = 0$ eller $y = -1$. Hvis $x \neq 0, y \neq 0$, så gir andre likning $x = -3y^2 - 2y$, og innsatt i første likning gir dette

$$2(-3y^2 - 2y) + y^2 + y = 0 \quad \Rightarrow \quad -5y^2 - 3y = 0$$

Dette gir $-5y - 3 = 0$ eller $y = -3/5$ siden $y \neq 0$. Setter vi dette inn i $x = -3y^2 - 2y$ finner vi $x = -3(-3/5)^2 - 2(-3/5) = 3/25$. Vi finner altså tre stasjonære punkter for f:

$$(x{,}y) = (0{,}0), \ (0, -1), \ (3/25, -3/5)$$

(b) Punktet $(0{,}0)$ er et stasjonært punkt fra forrige deloppgave. Om vi forsøker å klassifisere det ved hjelp av annenderivert-testen, går ikke det (vi får i så fall $AC - B^2 = 0$). Vi bruker derfor definisjonen. Vi har at $f(0{,}0) = 0$. Setter vi inn $(x{,}y) = (a{,}a)$ for et tall a nært null, får vi

$$f(a{,}a) = a^4 + 2a^3 = a^3(a + 2)$$

Vi ser at $a > 0$ gir $f(a{,}a) > 0$, og at $a < 0$ gir $f(a{,}a) < 0$ så lenge a er nært nok null (det vil si at $a + 2 > 0$, eller $a > -2$). Siden f tar verdier både større og mindre enn $f(0{,}0)$ vilkårlig nært $(0{,}0)$, er $(x{,}y) = (0{,}0)$ et sadelpunkt.

(c) Vi vet fra forrige deloppgave at $(0{,}0)$ er et sadelpunkt. Vi klassifiserer de andre stasjonære punktene ved hjelp av annenderivert-testen. De andre ordens partielt deriverte er

$$f''_{xx} = 2y, \quad f''_{xy} = 2x + 3y^2 + 2y, \quad f''_{yy} = 6xy + 2x$$

I punktet $(0, -1)$ får vi derfor $A = -2, \ B = 1, \ C = 0$ og $AC - B^2 = -1$. Siden $AC - B^2 < 0$, er $(0, -1)$ et sadelpunkt. I punktet $(x{,}y) = (3/25, -3/5)$ får vi

$$A = -\frac{6}{5}, \quad B = \frac{6 + 27 - 30}{25} = \frac{3}{25}, \quad C = \frac{-54 + 30}{125} = \frac{-24}{125}$$

og dermed er $AC - B^2 = (6 \cdot 24 - 3^2)/25^2 > 0$. Siden $A < 0$, kan vi konkludere med at $(3/25, -3/5)$ er et lokalt maksimum for f.

(d) Fra Ekstremverdisetningen vet vi at funksjonen f har en maksimums- og en minimumsverdi på $D = \{(x,y) : 0 \leq x,y \leq 1\}$, siden funksjonen f er kontinuerlig og D er en lukket og begrenset mengde. Eventuelle maksimum og minimum på D er enten indre punkt eller punkter på randen. Det er ingen stasjonære punkt blant de indre punktene, så maksimum og minimum må finnes blant randpunktene. Randen består av de fire kantene med punkter på formen $(0,y)$, $(1,y)$, $(x,0)$, $(x,1)$ med $0 \leq x,y \leq 1$. Hvis $x = 0$ eller $y = 0$, så er $f(x,y) = 0$. Det er to kanter igjen å sjekke: Hvis $x > 0$ og $y = 1$, så er

$$f(x,y) = f(x,1) = x^2 + x + x = x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 + 2x\right)'_x = 2x + 2 > 0$$

Funksjonsverdiene på denne kanten er altså voksende når x vokser. Hvis $y > 0$ og $x = 1$, så er

$$f(x,y) = f(1,y) = 1 + y^3 + y^2 = y^3 + y^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \left(y^3 + y^2 + 1\right)'_y = 3y^2 + 2y > 0$$

Funksjonsverdiene på denne kanten er altså også voksende når y vokser. Kandidater til maksimumsverdier på randen er derfor kun $f(1,1) = 3$, og kandidater til minimusverdier på randen er $f(0,y) = f(x,0) = 0$. Derfor er maksimumsverdien $f = 3$ og minimumsverdien er $f = 0$.

Oppgave 5.

(a) Vi ser at $x = -2$ gir $-8 - 2y + y^2 = 0$, og ved abc-formelen har vi da

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

Vi finner derfor $y = 4$ og $y = -2$, som gir de to punktene $(-2,4)$ og $(-2,-2)$. Den deriverte er gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{3x^2 + y}{x + 2y}$$

I punktet $(-2,4)$ gir dette $y' = -16/6 = -8/3$, og tangenten har derfor likning

$$y - 4 = -\frac{8}{3}(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{8}{3}x - \frac{4}{3}$$

I punktet $(-2,-2)$ får vi $y' = -10/(-6) = 5/3$, og tangenten har derfor likning

$$y + 2 = \frac{5}{3}(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$$

(b) Vi bruker Lagrange-funksjonen $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x - \lambda(x^3 + xy + y^2)$. *Lagrange-betingelsene* er førsteordensbetingelsene

$$\mathcal{L}'_x = 1 - \lambda(3x^2 + y) = 0$$
$$\mathcal{L}'_y = -\lambda(x + 2y) = 0$$

samt bibetingelsen $x^3 + xy + y^2 = 0$. Vi finner alle kandidatpunkter ved å løse Lagrange-betingelsene: Den andre likningen gir $\lambda = 0$ eller $x + 2y = 0$, og $\lambda = 0$ gir $1 = 0$ i første likning. Derfor må vi ha $\lambda \neq 0$, og $x + 2y = 0$ gir da $x = -2y$. Setter vi dette inn i bibetinelsen, får vi

$$(-2y)^3 + (-2y)y + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -8y^3 - y^2 = y^2(-8y - 1) = 0$$

Dette gir $y = 0$ eller $y = -1/8$. Hvis $y = 0$, så er $x = -2y = 0$, og dette gir $1 = 0$ i første likning. Derfor må $y \neq 0$, og dermed er $y = -1/8$, som gir $x = -2y = 1/4$ og $\lambda = 1/(3x^2 + y) = 1/(3/16 - 1/8) = 16$. Den eneste løsningen av Lagrangebetingelsen er altså

$$x = \frac{1}{4},\ y = -\frac{1}{8},\ \lambda = 16$$

I dette punktet er $f(x,y) = x = 1/4$. At dette er den maksimale verdien av x når $g(x,y) = 0$ kan vi se på følgende måte: Vi løser

$$g(x,y) = x^3 + xy + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3}}{2} = \frac{x}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4x}\right)$$

ved å bruke abc-formelen med $a = 1$, $b = x$ og $c = x^3$. Vi ser at for $1 - 4x < 0$ så finnes det ingen punkter med $g(x,y) = 0$ siden vi får et negativt tall under kvadratroten. Ulikheten $1 - 4x < 0$ gir $x > 1/4$, så det finnes ingen punkter (x,y) med $g(x,y) = 0$ og $x > 1/4$. Verdien $x = 1/4$ er derfor maksimum blant punkter med $g(x,y) = 0$.