Løsning	MET 11802 Matematikk
Dato	23. mai 2018 kl 0900 - 1200

Riktige svar: C-A-D-C-B B-C-B-B-A A-D-C-D-C

Oppgave 1.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den uendelige geometriske rekken

$$\frac{230.000}{(1+r)^3}+\frac{230.000}{(1+r)^4}+\cdots=\frac{230.000}{(1+r)^3}\cdot\frac{1}{1-1/(1+r)}=\frac{230.000}{r(1+r)^2}$$

med $r = 0{,}10$. Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 1.900.826 kr. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 2.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den uendelige geometriske rekken

$$\frac{700.000}{(1+r)^2}+\frac{700.000\cdot 0{,}97}{(1+r)^3}+\cdots=\frac{700.000}{(1+r)^2}\cdot\frac{1}{1-0{,}97/(1+r)}=\frac{700.000}{(r+0{,}03)(1+r)}$$

med $r = 0{,}10$. Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 4.895.105 kr. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 3.

Det er $12 \cdot 5 = 60$ terminer, og avdrag per måned er $300.000/60 = 5.000$ kr. Dermed er renten første termin $5.000 \cdot 0{,}036/12 = 900$ kr, og renten siste termin $5.000 \cdot 0{,}036/12 = 15$ kr. De samlede rentene blir dermed

$$\frac{900+15}{2}\cdot 60 = 27.450$$

Dette er $27.450/300.000 = 9{,}15\%$ av opprinnelig lånebeløp. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 4.

Kontantstrømmen har nåverdi lik investeringen når den uendelige geometriske rekken

$$\frac{150.000}{(1+r)^2}+\frac{150.000\cdot(1{,}05)}{(1+r)^3}+\cdots=\frac{150.000}{(1+r)^2}\cdot\frac{1}{1-(1{,}05)/(1+r)}=\frac{150.000}{(r-0{,}05)(1+r)}$$

har sum 3.000.000 kr. Dette gir likningen

$$\frac{150.000}{(r-0{,}05)(1+r)} = 3.000.000 \quad\Rightarrow\quad (r-0{,}05)(1+r)=\frac{150.000}{3.000.000}=0{,}05$$

Det vil si at $r^2 + 0{,}95r - 0{,}10 = 0$, som har én positiv løsning $r \cong 9{,}56\%$. Derfor er investeringen lønnsom ved diskonteringsrenten $r = 8\%$ men ikke ved $r = 10\%$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 5.

Vi skriver ulikheten på formen

$$\frac{x}{2-x}-1=\frac{2x-2}{2-x}>0$$

og setter opp fortegnsskjema. Vi ser at løsningsmengden er (1,2). Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 6.

Likningen kan skrives $(x+2)+2(x+1)=2(x+1)(x+2)$ etter å ha multiplisert med fellesnevner $(x+1)(x+2)$, eller $2x^2+3x=0$. Dette gir $x=0$ og $x=-3/2$, og det er en negativ løsning. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 7.

Likningen $9x^2+4y^2=1$ beskriver en ellipse med halvakser $a=1/3$ og $b=1/2$ siden den kan skrives om på formen

$$\frac{x^2}{1/9}+\frac{y^2}{1/4}=1$$

Vi har $a+b=5/6<1$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 8.

Siden $x^2-2x+3=0$ ikke har noen løsninger, har funksjonen ingen vertikale asymptoter. Polynomdivisjon gir

$$f(x)=\frac{2x^2+5x-7}{x^2-2x+3}=2+\frac{9x-13}{x^2-2x+3}$$

og dermed er $y=2$ horisontal asymptote. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 9.

Stigningstallet til tangenten i $x=1$ er lik $f'(1)$, og vi har at

$$f'(x)=\frac{(1\cdot\ln x+x\cdot 1/x)(x^2+5)-x\ln x\cdot 2x}{(x^2+5)^2}\quad\Rightarrow\quad f'(1)=\frac{1\cdot 6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 10.

Funksjonen har derivert gitt ved

$$f'(x)=2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}(-1)=(2x-x^2)e^{1-x}=x(2-x)e^{1-x}$$

Vi ser at $x(2-x)=0$ for $x=0$ og $x=2$, og at uttrykket er positivt for $0<x<2$, og negativt for $x<0$ og $x>0$ (for eksempel ved å sette opp fortegnsskjema). Dermed er $x=2$ eneste lokale maksimumspunkt. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 11.

Funksjonen har derivert $f'(x)=(4\sqrt{x}\ln x)'=2x^{-1/2}\ln x+4\sqrt{x}\cdot 1/x=2x^{-1/2}(\ln x+2)$, og annenderivert gitt ved

$$f''(x)=2(-1/2)x^{-3/2}\cdot(\ln x+2)+2x^{-1/2}\cdot 1/x=x^{-3/2}(-\ln x-2+2)=\frac{-\ln x}{x\sqrt{x}}$$

Vi har derfor at $f''(x)=0$ når $-\ln x=0$, eller $x=1$. Siden f er definert for $x>0$, er nevneren alltid positiv. Dermed er $x=1$ eneste vendepunkt for f, med f konveks i intervallet (0,1] og konkav i $[1,\infty)$. Vi kan også bruke fortegnsdiagram for f' for å se dette. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 12.

Ved kostnadsoptimum er $A(x) = K'(x)$, det vil si at enhetskostnad er lik grensekostnad. Dette gir

$$x + 400 + \frac{90.000}{x} = 2x + 400 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 90.000$$

Vi har kostnadsoptimum ved $x = 300$ siden dette gir $A(x) = K'(x)$, med $A(x)$ avtagende for $x \leq 300$ og voksende for $x \geq 300$. Den minimale enhetskostnaden er $A(300) = 400 + 300 + 90.000/300 = 1.000$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 13.

Den deriverte funksjonen er $f'(x) = 2x - 4$. Dermed er funksjonen voksende for $x \geq 2$, og f har en omvendt funksjon. Siden $f(x) = 0$ har løsningene $x = 1$ og $x = 3$, og $x = 3$ er i D_f, så er $f^{-1}(0) = 3$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 14.

Siden $4\sqrt{x} \to 0$ og $\ln x \to -\infty$ når $x \to 0^+$, så skriver vi grenseverdien som

$$\lim_{x \to 0^+} 4\sqrt{x} \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{4 \ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4 \ln x}{x^{-1/2}}$$

Dette gir et ubestemt uttrykk av typen «$-\infty/\infty$». Vi kan dermed bruke L'Hopitals regel, som gir

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4 \ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4/x}{(-1/2)x^{-3/2}} = \lim_{x \to 0^+} \left(-8\sqrt{x}\right) = 0$$

Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 15.

Funksjonen f er definert for $x > 0$, og fra Oppgave 11 har vi at

$$f'(x) = \frac{2(\ln x + 2)}{\sqrt{x}}$$

Det eneste stasjonære punktet er gitt ved $\ln x + 2 = 0$, det vil si $\ln x = -2$, eller $x = e^{-2} = 1/e^2$. Vi ser at f er avtagende i $(0,1/e^2]$ og voksende i $[1/e^2,\infty)$, for eksempel ved å sette opp fortegnsdiagram for f'. Dermed har f et globalt minimum i $x = 1/e^2$, og ingen globale maksimum. Riktig svar er alternativ **C**.