Løsning	MET 11802 Matematikk
Dato	13. desember 2017 kl 0900 - 1200

Riktige svar: C-B-A-B-D D-C-B-C-D A-D-B-D-C

Oppgave 1.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den uendelige geometriske rekken

$$\frac{215.000}{(1+r)^2}+\frac{215.000}{(1+r)^3}+\cdots=\frac{215.000}{(1+r)^2}\cdot\frac{1}{1-1/(1+r)}=\frac{215.000}{r(1+r)}$$

med $r=0{,}10$. Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 1.954.545 kr. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 2.

Kontraktsfestet kontantstrøm har nåverdi lik den uendelige geometriske rekken

$$\frac{390.000}{(1+r)^2}+\frac{390.000\cdot 1{,}04}{(1+r)^3}+\cdots=\frac{390.000}{(1+r)^2}\cdot\frac{1}{1-1{,}04/(1+r)}=\frac{390.000}{(r-0.04)(1+r)}$$

med $r=0{,}10$. Avrundet til nærmeste hele kr gir dette 5.909.091 kr. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 3.

Månedsbeløpet A må tilfredsstille likningen

$$\frac{A}{(1+r)}+\frac{A}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{A}{(1+r)^{60}}=300.000$$

med $1+r=1+14{,}40\%/12=1{,}012$. Dette gir at

$$\frac{A}{(1{,}012)}\cdot\frac{1-(1/1{,}012)^{60}}{1-1/1{,}012}=300.000 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{300.000\cdot 0{,}012\cdot 1{,}012^{60}}{1{,}012^{60}-1}$$

Dermed er $A\cong 7.042{,}84$ kr, og de samlede rentene utgjør følgende andel av lånebeløpet:

$$\frac{60\cdot A-300.000}{300.000}\cong 0{,}409=40{,}9\%$$

Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 4.

Kontantstrømmen har nåverdi lik investeringen når den uendelige geometriske rekken

$$\frac{150.000}{(1+r)^2}+\frac{150.000\cdot(1+g)}{(1+r)^3}+\cdots=\frac{150.000}{(1+r)^2}\cdot\frac{1}{1-(1+g)/(1+r)}=\frac{150.000}{(r-g)(1+r)}$$

har sum 3.000.000 kr med $r=0{,}10$. Dette gir likningen

$$\frac{150.000}{(0{,}10-g)(1{,}10)}=3.000.000 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{0{,}10-g}=\frac{3.000.000\cdot 1{,}10}{150.000}=22$$

Det vil si at $0{,}10-g=1/22$, eller $g=0{,}10-1{,}22\cong 5{,}45\%$. Derfor er investeringen lønnsom om veksten er minst 5,45%. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 5.

Vi skriver ulikheten på formen

$$\frac{2-x}{x+4} - 2 = \frac{-3x-6}{x+4} = \frac{-3(x+2)}{x+4} > 0$$

og setter opp fortegnsskjema. Vi ser at løsningsmengden er $(-4, -2)$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 6.

Likningen kan skrives $2x^3 + 9x^2 + 7x = 18$, eller $2x^3 + 9x^2 + 7x - 18 = 0$ etter muliplikasjon med fellesnevner $3x$. Ved innsetting ser vi at $x = 1$ er en løsning, og polynomdivisjon gir faktoriseringen

$$(x-1)(2x^2 + 11x + 18) = 0$$

Siden $2x^2 + 11x + 18 = 0$ ikke gir noen løsninger, er $x = 1$ eneste løsning. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 7.

Vi fullfører kvadratene og skriver likningen på formen $x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 8y + 4 = -1 + 1 + 4 = 4$, eller $(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 4$. Dette er en ellipse siden likningen kan skrives

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

og halvaksene er $a = \sqrt{4} = 2$ og $b = \sqrt{1} = 1$, slik at $ab = 2$. Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 8.

Vi har at $x = 2$ er eneste vertikale asymptote, siden dette gir null i nevner og $-2 \neq 0$ i teller. Dermed er $a = 2$. Den skrå asymptoten finner vi ved polynomdivisjonen

$$(x^2 - 3x) : (x-2) = x - 1 + \frac{-2}{x-2}$$

Dermed er $b = -1$ og $a - b = 3$. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 9.

Stigningstallet til tangenten i $x = 0$ er lik $f'(0)$, og vi har at

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x^2 + 2x + 3) + x \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+3} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \ln(3) \approx 1{,}10$$

Riktig svar er alternativ **C**.

Oppgave 10.

Funksjonen har derivert gitt ved

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Vi ser at $1 - 2\ln(x) = 0$ gir $\ln x = 1/2$, eller $x = e^{1/2} = \sqrt{e}$. Dette er det eneste stasjonære punkt for f. Vi setter opp fortegnsdiagram for f', og ser at $x = \sqrt{e} \approx 1{,}65$ er et lokalt maksimumspunkt siden f er voksende i $(0,\sqrt{e}]$ og avtagende i $[\sqrt{e},\infty)$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 11.

Funksjonen har derivert fra forrige oppgave og annenderivert gitt ved

$$f''(x) = \frac{(-2/x)\cdot x^3 - (1-2\ln x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-2x^2 - 3x^2(1-2\ln x)}{x^6} = \frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

Vi har derfor at $f''(x) = 0$ når $6\ln x = 5$, eller $\ln x = 5/6$, slik at $x = e^{5/6} \approx 2{,}30$ er eneste vendepunkt for f, med f konkav i intervallet $(0{,}e^{5/6}]$ og konveks i intervallet $[e^{5/6}{,}\infty)$. Riktig svar er alternativ **A**.

Oppgave 12.

Ved kostnadsoptimum er $A(x) = K'(x)$, det vil si at enhetskostnad er lik grensekostnad. Dette gir

$$x + 200 + \frac{160.000}{x} = 2x + 200 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 160.000$$

Vi har kostnadsoptimum ved $x = 400$ siden dette gir $A(x) = K'(x)$, med $A(x)$ avtagende for $x \leq 400$ og voksende for $x \geq 400$. Den minimale enhetskostnaden er $A(400) = 400+200+160.000/400 = 1.000$. Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 13.

Den deriverte funksjonen er

$$f'(x) = \frac{(1/x)\cdot x - (\ln x - 1)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-(\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2-\ln x}{x^2}$$

Funksjonen f er voksende i $[1{,}4]$, siden $x^2 > 0$ og $\ln(x) < 2$. Derfor har f en omvendt funksjon, og $D_{f^{-1}} = V_f = [f(1){,}f(4)] = [-1, (\ln 4 - 1)/4]$. Siden $(\ln 4 - 1)/4 \approx 0{,}097 < 1$, så er $f^{-1}(1)$ ikke definert. Riktig svar er alternativ **B**.

Oppgave 14.

Siden $\ln x \to \infty$ og $x^2 \to \infty$ når $x \to \infty$, så er grenseverdien et ubestemt uttrykk av typen «∞/∞». Vi kan dermed bruke L'Hopitals regel, som gir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Riktig svar er alternativ **D**.

Oppgave 15.

Vi har at $f'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot(1/x) = \ln x + 1$. Stasjonære punkter er derfor gitt ved likningen $\ln x + 1 = 0$, som gir $\ln x = -1$, eller $x = e^{-1} = 1/e \approx 0{,}37$. Funksjonen f er definert for $x > 0$, og f er avtagende i $(0{,}1/e]$ og voksende i $[1/e{,}\infty)$. Det betyr at $x = 1/e$ er et globalt minimumspunkt for f, og f har ingen globale maksimumspunkter. Riktig svar er alternativ **C**.