

MET1180 Matematikk for siviløkonomer

Høst 2024

Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing.

R. Lucas

Forelesning 4 og 5

Kap 1.7-8: Uendelige rekker og grenseverdier. Eulers tall og kontinuerlig forrentning.

Under står det anbefalte oppgaver fra læreboken [L]. Oppgaveboken [O] inneholder løsningsforslag til alle oppgavene i læreboken og noen flere oppgaver. Etterhvert vil det også komme noen anbefalte eksamensoppgaver.

[L] Eivind Eriksen. Matematikk for økonomi og finans.

[O] Eivind Eriksen. Matematikk for økonomi og finans. Oppgaver og løsningsforslag.

[L] 1.5.1-5

[L] 1.6.1-7

[L] 1.7.1-5

[L] 1.8.1-7

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 5/9 fra kl 10 i D1-065/70 og D3-037

Oppgave 1 Beregn summen av rekkene.

a) $1 + 1,04 + 1,04^2 + 1,04^3 + \dots + 1,04^{10}$.

b) $1 + 1,04 + 1,04^2 + 1,04^3 + \dots + 1,04^{20}$.

c) $1 + 1,04 + 1,04^2 + 1,04^3 + \dots + 1,04^n$.

d) $30\,000 \cdot 1,04^{20} + 30\,000 \cdot 1,04^{19} + 30\,000 \cdot 1,04^{18} + \dots + 30\,000 \cdot 1,04^2 + 30\,000 \cdot 1,04$.

e) Beskriv en finanssituasjon hvor summen i (d) er aktuell.

f) $1 + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{1,04^2} + \frac{1}{1,04^3} + \dots + \frac{1}{1,04^{20}}$.

g) Forklar hvorfor $1,04^{20}$ multiplisert med summen (f) gir summen (b).

h) $1 + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{1,04^2} + \frac{1}{1,04^3} + \dots + \frac{1}{1,04^n}$.

i) $\frac{30\,000}{1,04} + \frac{30\,000}{1,04^2} + \frac{30\,000}{1,04^3} + \dots + \frac{30\,000}{1,04^{20}}$.

j) Beskriv en finanssituasjon hvor summen (i) er aktuell.

Oppgave 2 Anta at du skal få utbetalt 500 000 hvert år i n år med første utbetaling om et år. Anta renten er på 3,5%.

a) Skriv opp den geometriske rekken som gir nåverdien av kontantstrømmen.

b) Bruk den geometriske rekken til å beregne nåverdien av kontantstrømmen for $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$, $n = 80$ og $n = 1000$.

c) Beregn nåverdien av kontantstrømmen hvis den fortsetter i all fremtid.

Oppgave 3 Anta at den nominell årlige renten er 4,8%.

a) Anta årlig forrentning (kapitalisering). Finn den årlige vekstfaktoren. Beregn den 10-årige vekstfaktoren og den 10-årige effektive renten.

b) Anta kvartalsvis forrentning. Beregn den årlige vekstfaktoren og den effektive renten. Beregn den 10-årige vekstfaktoren og den 10-årige effektive renten.

- c) Anta månedlig forrentning. Beregn den årlige vekstfaktoren og den effektive renten. Beregn den 10-årige vekstfaktoren og den 10-årige effektive renten.
- d) Anta daglig forrentning. Beregn den årlige vekstfaktoren og den effektive renten. Beregn den 10-årige vekstfaktoren og den 10-årige effektive renten.
- e) Anta kontinuerlig forrentning. Beregn den årlige vekstfaktoren og den effektive renten. Beregn den 10-årige vekstfaktoren og den 10-årige effektive renten.

Oppgave 4 Du setter inn 30 000 på konto med 2,9% nominell rente.

- a) Anta at det er årlig kapitalisering.
 - i) Beregn hvor mye det er på kontoen etter 10 år.
 - ii) Finn vekstfaktoren og den relative (prosentvise) endringen for disse 10 årene.
- b) Anta at det er kontinuerlig kapitalisering.
 - i) Beregn hvor mye det er på kontoen etter 10 år.
 - ii) Finn vekstfaktoren og den relative (prosentvise) endringen for disse 10 årene.
 - iii) Finn den (årlige) effektive renten.

Oppgave 5 Du vurderer å investere 2 millioner kroner i et verdipapir for å kunne selge det for 5 millioner om 20 år.

- a) Beregn internrenten hvis det er årlig kapitalisering.
- b) Beregn internrenten hvis det er kvartalsvis kapitalisering.
- c) Beregn internrenten hvis det er månedlig kapitalisering.
- d) Beregn internrenten hvis det er kontinuerlig kapitalisering. (Hint: Her kan du prøve deg frem med forskjellige renter.)

Oppgave 6 Hege vurderer et boliglån med 25 årlige terminer. Hun regner med at hun kan betale 120 000 pr år. Første termin er om et år.

- a) Anta renten er 2,0% og at det er årlig forrentning. Finn den geometriske rekken som gir nåverdien av betalingsstrømmen og bruk denne til å beregne hvor mye Hege kan låne.
- b) Anta renten er 2,0% og at det er kontinuerlig forrentning. Finn den geometriske rekken som gir nåverdien av betalingsstrømmen og bruk denne til å beregne hvor mye Hege kan låne.
- c) Vurder svarene i (a) og (b) mot hverandre.

Oppgave 7 Anta at du skal få utbetalt 300 000 hvert år i n år med første utbetaling om et år. Anta renten er på 3,5% med kontinuerlig forrentning.

- a) Skriv opp den geometriske rekken som gir nåverdiene av kontantstrømmen.
- b) Bruk den geometriske rekken til å beregne nåverdien av kontantstrømmen for $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$, $n = 80$ og $n = 1000$.
- c) Bruk den geometriske rekken til å beregne nåverdien av kontantstrømmen hvis den fortsetter i all fremtid.

Oppgave 8 Anta at et fast beløp $A = 40\,000$ (annuiteten) betales hvert år i n år med første betaling om et år. Anta den nominelle renten er r med kontinuerlig forrentning.

- a) Finn den geometriske rekken som uttrykker nåverdien til denne kontantstrømmen hvis $n = 25$ og $r = 2,6\%$. Bruk denne rekken til å beregne nåverdien.
- b) Anta annuiteten betales for alltid. Finn den uendelige geometriske rekken som uttrykker nåverdien til denne kontantstrømmen hvis $r = 2,6\%$. Bruk denne rekken til å beregne nåverdien.
- c) Anta annuiteten betales for alltid. Finn renten r slik at nåverdien (K_0) blir 3 millioner kroner. (Hint: Her kan du prøve deg frem med forskjellige renter.)
- d) Forklar hvorfor (c) gir likningen

$$e^r = \frac{K_0 + A}{K_0} = \frac{3\,000\,000 + 40\,000}{3\,000\,000} = 1,0133$$

Fasit

Oppgave 1

- a) $\frac{1,04^{11}-1}{0,04} = 13,49$.
- b) $\frac{1,04^{21}-1}{0,04} = 31,97$.
- c) $\frac{1,04^{n+1}-1}{0,04}$.
- d) $30\,000 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,04^{20}-1}{0,04} = 929\,076,05$.
- e) Innbetaling av 30 000 hvert år i 20 år på en konto med 4% rente med årlig kapitalisering gir denne summen som sluttverdi (fremtidsverdi etter 20 år).
- f) Vi leser den geometriske rekken baklengs: $\frac{1}{1,04^{20}} \cdot \frac{1,04^{21}-1}{0,04} = 14,59$.
- g) $(1 + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{1,04^2} + \frac{1}{1,04^3} + \dots + \frac{1}{1,04^{20}}) \cdot 1,04^{20} = 1,04^{20} + 1,04^{19} + \dots + 1,04^2 + 1,04 + 1$.
- h) $\frac{1}{1,04^n} \cdot \frac{1,04^{n+1}-1}{0,04}$.
- i) $\frac{30\,000}{1,04^{20}} \cdot \frac{1,04^{20}-1}{0,04} = 407\,709,79$.
- j) Nåverdien (lånebeøpet) til et annuitetslån med annuitet 30 000, 4% rente med årlig forrentning og 20 års løpetid.

Oppgave 2

- a) $\frac{500\,000}{1,035} + \frac{500\,000}{1,035^2} + \frac{500\,000}{1,035^3} + \dots + \frac{500\,000}{1,035^n}$.
- b) $n = 10 : \frac{500\,000}{1,035^{10}} \cdot \frac{1,035^{10}-1}{0,035} = 4\,158\,302,66$, $n = 20 : \frac{500\,000}{1,035^{20}} \cdot \frac{1,035^{20}-1}{0,035} = 7\,106\,201,65$,
 $n = 40 : \frac{500\,000}{1,035^{40}} \cdot \frac{1,035^{40}-1}{0,035} = 10\,677\,536,17$, $n = 80 : \frac{500\,000}{1,035^{80}} \cdot \frac{1,035^{80}-1}{0,035} = 13\,374\,387,83$ og
 $n = 1000 : \frac{500\,000}{1,035^{1000}} \cdot \frac{1,035^{1000}-1}{0,035} = 14\,285\,714,29$.
- c) $\frac{500\,000}{1,035^n} \cdot \frac{1,035^n-1}{0,035} = 500\,000 \cdot \frac{1-\frac{1}{1,035^n}}{0,035}$ som nærmer seg mer og mer $500\,000 \cdot \frac{1}{0,035} = 14\,285\,714,29$ når n blir større og større (« n går mot uendelig» som oftes skrives « $n \rightarrow \infty$ »).

Oppgave 3

- a) Årlig vekstfaktor: 1,048, 10-årlig vekstfaktor: $1,048^{10} = 1,5981$, 10-årlig effektiv rente: 59,81%.
- b) Årlig vekstfaktor: 1,0489, 10-årlig vekstfaktor: 1,6115, 10-årlig effektiv rente: 61,15%.
- c) Årlig vekstfaktor: 1,0491, 10-årlig vekstfaktor: 1,6145, 10-årlig effektiv rente: 61,45%.
- d) Årlig vekstfaktor: 1,0492, 10-årlig vekstfaktor: 1,6160, 10-årlig effektiv rente: 61,60%.
- e) Årlig vekstfaktor: 1,0492, 10-årlig vekstfaktor: 1,6161, 10-årlig effektiv rente: 61,61%.

Oppgave 4

- a) (i) 39 927,77
 (ii) Vekstfaktoren: 1,3309, relative prosentvis endring: 33,09%
- b) (i) 40 092,82
 (ii) Vekstfaktoren: 1,3364, relative prosentvis endring: 33,64%
 (iii) 2,94%

Oppgave 5

- a) $2,5^{\frac{1}{20}} - 1 = 4,69\%$
- b) 4,61%
- c) 4,59%
- d) Får likningen $e^r = 2,5^{\frac{1}{20}} = 1,0469$ og prøver: $r = 4,58\%$.

Oppgave 6

- a) Nåverdi: $120\,000 \cdot \frac{1}{1,02} + 120\,000 \cdot \frac{1}{1,02^2} + 120\,000 \cdot \frac{1}{1,02^3} + \dots + 120\,000 \cdot \frac{1}{1,02^{24}} + 120\,000 \cdot \frac{1}{1,02^{25}}$.
 Lånebeløp: 2 342 814,78
- b) Nåverdi:
 $120\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,02}} + 120\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,02})^2} + 120\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,02})^3} + \dots + 120\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,02})^{24}} + 120\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,02})^{25}}$.
 Lånebeløp: $120\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,02 \cdot 25}} \cdot \frac{e^{0,02 \cdot 25} - 1}{e^{0,02} - 1} = 2\,337\,286,57$
- c) Med kontinuerlig forrentning kan Hege låne litt mindre fordi den effektive renten hun må betale er litt høyere.

Oppgave 7

a)

$$300\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,035}} + 300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,035})^2} + \dots + 300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,035})^{n-1}} + 300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,035})^n}$$

b) Summen av den geometriske rekken: $300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,035})^n} \cdot \frac{(e^{0,035})^n - 1}{e^{0,035} - 1}$. For $n = 10$: 2 487 206,55 for $n = 20$: 4 239 911,38 for $n = 40$: 6 345 389,07 for $n = 80$: 7 910 142,75 for $n = 1000$: 8 422 303,55.

c) $300\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,035})^n} \cdot \frac{(e^{0,035})^n - 1}{e^{0,035} - 1} = 300\,000 \cdot \frac{1 - (e^{0,035})^{-n}}{e^{0,035} - 1}$ nærmer seg mer og mer $300\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,035} - 1} = 8\,422\,303,55$ når n blir større og større.

Oppgave 8

a)

$$40\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,026}} + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,026})^2} + \dots + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,026})^{24}} + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,026})^{25}}$$

$$= 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,026})^{25}} \cdot \frac{(e^{0,026})^{25} - 1}{e^{0,026} - 1} = 40\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,026 \cdot 25}} \cdot \frac{e^{0,026 \cdot 25} - 1}{e^{0,026} - 1} = 725\,796,53$$

b)

$$40\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,026}} + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,026})^2} + \dots + 40\,000 \cdot \frac{1}{(e^{0,026})^n} + \dots$$

$$= 40\,000 \cdot \frac{1}{e^{0,026} - 1} = 1\,518\,548,20$$

c) Får likningen $e^r = 1,0133$ som gir $r = 1,32\%$.