## Veiledningsoppgaver

**Oppgave 1.**
Vi ser på følgende Lagrange-problem: $\max / \min \; f(x,y) = xy \quad$ når $\quad x^2 + y^2 = 4$

a) Løs Lagrangebetingelsene og finn kandidatpunkter.
b) Finnes tillatte punkter med degenerert bibetingelse?
c) Løs optimeringsproblemet.

**Oppgave 2.**
Hva vil det si at bibetingelsen er degenerert? Kan du gi eksempler på en bibetingelsen $g(x,y) = a$ som har et tillatt punkt med degenerert bibetingelse? Kan du finne en funksjon $f(x,y)$ slik at optimeringsproblemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = a$ har punktet med degenerert bibetingelse som maksimumspunkt?

**Oppgave 3.**
Vi betrakter Lagrange-problemet: $\min f(x,y) = xy \quad$ når $\quad x^2 + 4y^2 = 4$.

a) Lag en skisse av kurven gitt ved $x^2 + 4y^2 = 4$, og avgjør om dette er en begrenset mengde.
b) Skriv ned Lagrange-betingelsene, og finn alle $(x,y;\lambda)$ som oppfyller disse betingelsene.
c) Løs Lagrange-problemet.
d) Gi en tolkning av Lagrangemultiplikatoren i et Lagrange-problem, og bruk denne tolkningen til å estimere minimumsverdien til det nye Lagrange-problemet: $\min f(x,y) = xy \quad$ når $\quad x^2 + 4y^2 = 5$

**Oppgave 4.**
Det er oppgitt at Lagrange-problemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = 4$ har maksimumsverdi $f(1,3) = 12$ i det ordinære kandidatpunktet $(x,y;\lambda) = (1,3;2)$. Hva er tolkningen av $\lambda = 2$? Bruk dette til å estimere maksimums-verdien til Lagrange-problemet $\max f(x,y)$ når $g(x,y) = 3$.

**Oppgave 5.**
Vi betrakter Lagrange-problemet $\max / \min f(x,y) = x + 2y - \sqrt{36 - x^2 - 4y^2} \quad$ når $\quad x^2 + 4y^2 = 36$.

a) Finn punktene på nivåkurven $x^2 + 4y^2 = 36$ der tangenten har stigningstall $y' = 1/2$.
b) Tegn en skisse av $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 36\}$. Er $D$ begrenset? Hva slags kurve er dette?
c) Løs Lagrange-problemet og finn maksimums- og minimumsverdien.
d) Løs det nye optimeringsproblemet vi får når vi endrer bibetingelsen til $x^2 + 4y^2 \leq 36$.

**Oppgave 6.**
Vi betrakter Lagrange-problemet $\max / \min f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ når $x + y = 2$.

a) Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne kandidater $(x,y;\lambda)$ for maksimum og minimum.
b) Skriv om funksjonen $f(x,y)$ ved å bruke at $(x + y)^2 = 2^2 = 4$ i alle tillatte punkter (alle punkter som oppfyller bibetingelsen). Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne kandidater $(x,y;\lambda)$ for maksimum og minimum i det nye Lagrange-problemet.
c) Løs bibetinelsen for en av variablene, og bruk dette til å forenkle uttrykket for $f(x,y)$ til en funksjon i én variabel. Løs optimeringsproblemet du nå får.
d) Sammenlikn svarene og vurder sammenhengen mellom de tre metodene. Løs så optimeringsproblemet.

**Oppgave 7.**
Vi betrakter funksjonen $f(x,y) = x^2y^2 + xy + x - y$.

a) Vis at nivåkurven $f(x,y) = 2$ skjærer linjen $y = x$ i to punkter $(a,a)$ og $(b,b)$.

b) Finn tangenten til nivåkurven $f(x,y) = 2$ i punktene $(a,a)$ og $(b,b)$.

c) Finn eventuelle stasjonære punkter for $f$, og klassifisér disse som lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkt.

**Oppgave 8.**
Vi ser på kurven $C$ i $xy$-planet gitt ved likningen $y^2 = 5x^2 - x^3$ og Lagrange-problemet

$$\max f(x,y) = x + y \text{ når } y^2 = 5x^2 - x^3$$

a) Bestem punktene $(x,y) \neq (0,0)$ på $C$ der tangenten har stigningstall $-1$.

b) Finn alle $(x,y;\lambda)$ som oppfyller Lagrange-betingelsene.

c) Avgjør om Lagrange-problemet har et maksimum, og finn i så fall maksimumsverdien.

## Oppgaver fra læreboken

| | |
|---|---|
| Læreboken [E]: | Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans* |
| Oppgaveboken [O]: | Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag* |

| | |
|---|---|
| Oppgaver: | [E] 7.7.3 - 7.7.6, 8.17 [O] 10.20 |
| Fullstendig løsning: | Se [O] Kap 7.7, 8, 10 |

## Svar på veiledningsoppgaver

**Oppgave 1.**

a) $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}; 1/2)$, $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}; -1/2)$

b) Nei

c) $f_{\text{max}} = 2$, $f_{\text{min}} = -2$

**Oppgave 3.**

a) Begrenset (ellipse)

b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2; 1/4), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2; 1/4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2; -1/4), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2; -1/4)$

c) $f_{\text{min}} = -1$

d) $f_{\text{min}} \approx -1.25$ når $x^2 + 4y^2 = 5$

**Oppgave 4.**
$f_{\text{max}} \approx 12 + (-1) \cdot 2 = 10$

**Oppgave 5.**

a) $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}/2), (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}/2)$

b) Ja, ellipse med halvakser $a = 6$ og $b = 3$ med sentrum (0,0)

c) $f_{\text{max}} = 6\sqrt{2}$, $f_{\text{min}} = -6\sqrt{2}$

d) $f_{\text{max}} = 6\sqrt{2}$, $f_{\text{min}} = -6\sqrt{3}$

**Oppgave 6.**

a) $(1,1; 1)$

b) $(1,1; -3)$

c) $(1,1)$

d) $f_{\text{min}} = 1$, ingen maksimumsverdi

**Oppgave 7.**

a) $(1,1),(-1,-1)$

b) $y = 2x - 3$, $y = -x/2 - 3/2$

c) $(-1,1)$, sadelpunkt

**Oppgave 8.**

a) $(4,4),(20/9, -100/27)$

b) $(4,4; 1/8), (20/9, -100/27; -27/200)$

c) Nei