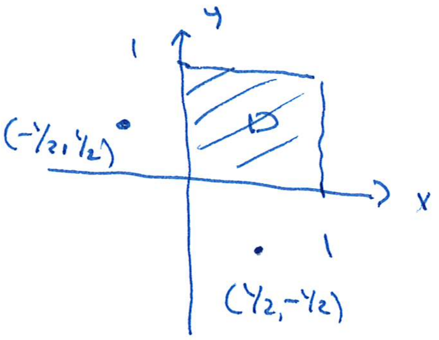
Oppgaveark 46, Oppgave 7

$$\max \ f(x,y) = (x-y)e^{2xy} \quad \text{når} \quad 0 \le x,y \le 1$$

Løsning:

D: $0 \le x,y \le 1$



D lukket ($\le$) og begrenset, dermed har f et max på D ved EVS (ekstremverdi setn.)

$\Rightarrow$ Finner alle kandidatpkt og regner ut f for hver av disse for å finne max

Kandidat pkt:

i) Stasjonære pkt (i det indre av D)

$$f'_x = 1 \cdot e^{2xy} + (x-y)\cdot e^{2xy}\cdot 2y$$
$$= e^{2xy}(1 + 2y(x-y)) = 0$$
$$\Rightarrow 2y(x-y) = -1 \quad (\text{siden } e^{2xy} > 0)$$

$$f'_y = -1 \cdot e^{2xy} + (x-y)\cdot e^{2xy}\cdot 2x$$
$$= e^{2xy}(-1 + 2x(x-y)) = 0 \quad (—\|—)$$
$$\Rightarrow 2x(x-y) = 1$$

Dette gir:
$$2xy - 2y^2 = -1$$
$$2x^2 - 2xy = 1$$
$$\overline{2x^2 - 2y^2 = 0} \qquad x^2 = y^2$$

$\underline{x=y}$: $2x \cdot 0 = 1$ umulig

$\underline{x=-y}$: $-2y(-y-y) = 1$

Setter inn i $2x(x-y)=1$

$-2y(-2y) = 1$

$4y^2 = 1 \quad y^2 = 1/4 \Rightarrow y = \pm 1/2$

$\Rightarrow$ Stasjonære pkt: $(1/2, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$ utenfor D

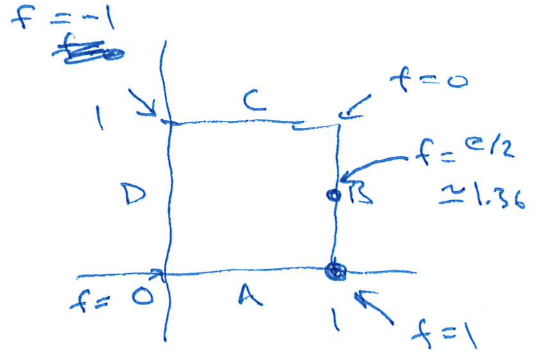
Dvs: Ingen stasjonære pkt i det indre av D.

ii) pkt der f'_x / f'_y ikke fins

Ingen, da partiellderiverte eksisterer i alle pkt.

iii) Randpkt:

$f(x,y) = (x-y)e^{2xy}$, $0 \le x,y \le 1$



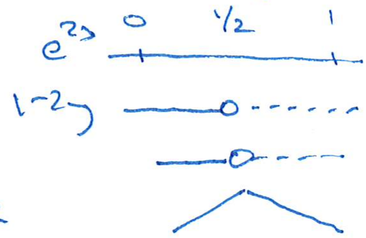
A: $y=0$ $\quad f = x \cdot e^0 = x$ (voksende fn.)

max på A: $x=1$ $\quad f(1,0) = 1$

B: $x=1$ $\quad f = (1-y)e^{2\cdot 1 y} = (1-y)e^{2y}$

$f' = -1\cdot e^{2y} + (1-y)e^{2y}\cdot 2 = e^{2y}(-1+2(1-y))$

$= e^{2y}(1-2y)$



maks på B: $y = 1/2$

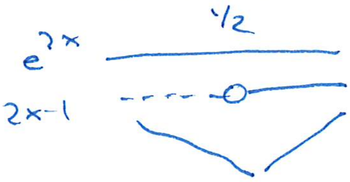
$f(1,1/2) = \frac{1}{2}e$

$\simeq 1.36$

C: $y=1$ $\quad f = (x-1)e^{2x}$

$f' = 1\cdot e^{2x} + (x-1)e^{2x}\cdot 2 = e^{2x}(1+2(x-1))$

$= e^x(2x-1)$



$x=0$: $f(0,1) = -1\cdot 1 = -1$

$x=1$: $f(1,1) = 0$

max på C: $x=1$ $\quad f(1,1) = 0$

D: $x=0$ $\quad f = -ye^0 = -y$ avtagende

max på D: $y=0$

$f(0,0) = 0$

Konkl: $f_{max} = f(1,1/2) = e/2 \simeq 1.36$ i $(x,y) = (1,1/2)$

siden dette gir størst verdi på randen (dvs av alle kandidatpkt) og vi vet at f har et maks på D.