Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = \ln(2x - y)$ i nærheten av punktet $(x,y) = (1,1)$.

a) Regn ut $c = f(1,1)$, og tegn inn nivåkurvene $f(x,y) = c$ og $f(x,y) = c + 1$ i samme koordinatsystem.

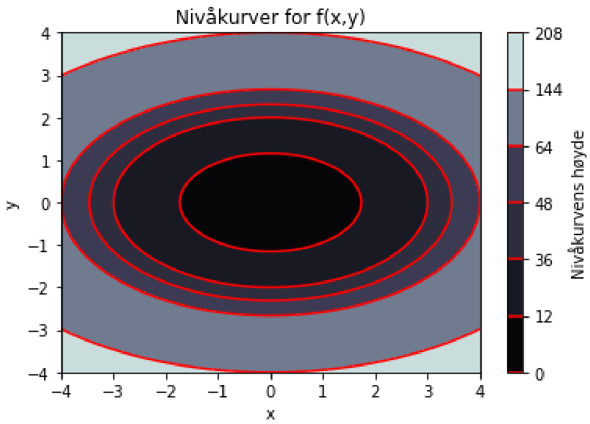
b) Regn ut $\nabla f(1,1)$, og tegn inn denne vektoren på tegningen med startpunkt i $(1,1)$.

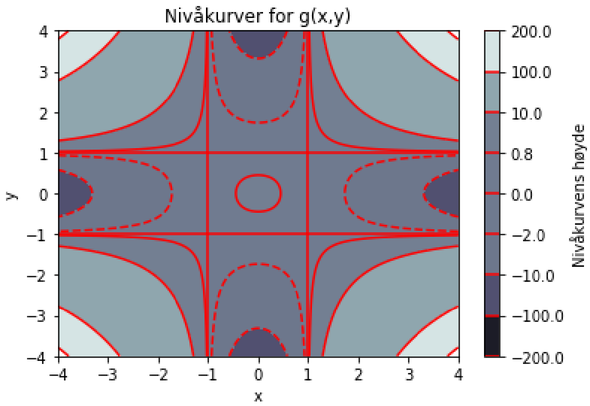
c) Bestem den lineære approksimasjonen til $f(x,y)$ i nærheten av $(1,1)$, og bruk den til å estimere $f(1.1,0.9)$.

d) Finn likningen for tangentplanet til grafen $z = f(x,y)$ i $(1,1)$.

Oppgave 2.
Bestem de (globale) maksimums- og minimumsverdiene til $f(x,y) = \sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2}$, dersom de finnes.

Oppgave 3.
Nivåkurver for funksjonene $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ og $g(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$ i området $-4 \leq x,y \leq 4$ er vist i figurene nedenfor.





Bruk nivåkurvene til å løse optimeringsproblemene. Det kan være nyttig å bruke skalaen på høyre side av figurene. Prøv først å løse oppgaven kun ut i fra figurene. Du kan eventuelt gjøre tilleggsberegninger hvis nødvendig.

a) Finn max / min $f(x,y)$ når $-4 \leq x,y \leq 4$.

b) Finn max / min $g(x,y)$ når $-4 \leq x,y \leq 4$.

c) Finn max / min $f(x,y)$ når $x^2 + y^2 = 16$.

d) Finn max / min $g(x,y)$ når $x = y$.

Oppgave 4.
Vi ser på delmengden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gitt ved ulikheten $y(x-2) \leq 3$. Lag en skisse av $D = \{(x,y) : y(x-2) \leq 3\}$, og marker indre punkter og randpunkter for D. Er D kompakt?

Oppgave 5.
Vi ser på en delmengde av planet $\mathbb{R}^2$ gitt ved følgende betingelser. Avgjør om delmengden er kompakt. Det er nyttig å lage en skisse av området.

a) $2x+3y=6$ b) $2x+3y<6$ c) $2x+3y\leq 6$ d) $x^2+y^2=4$
e) $x^2+y^2\geq 4$ f) $x^2+y^2\leq 4$ g) $x^2-2x+4y^2=4$ h) $x^2-2x+4y^2\leq 4$
i) $x^2-2x+4y^2\geq 4$ j) $xy=1$ k) $xy\leq 1$ l) $xy\geq 1$
m) $\sqrt{x^2+y^2}=3$ n) $\sqrt{x^2+y^2}\leq 3$ o) $x^2y^2-x^2-y^2+1=0$ p) $x^2y^2-x^2-y^2+1=1$

Oppgave 6.
Hva sier ekstremverdisetningen? Gi eksempler på en mengde D i planet som er lukket men ikke begrenset, og en mengde E i planet som er begrenset men ikke lukket. Kan du finne en funksjon $f(x,y)$ som ikke har maksimum og minimum på D, og en funksjon $g(x,y)$ som ikke har maksimum og minimum på E?

Oppgave 7.
Løs optimeringsproblemene. Merk at skrivemåten $0\leq x,y\leq 1$ betyr at $0\leq x\leq 1$ og $0\leq y\leq 1$.

a) $\max/\min f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ når $0\leq x,y\leq 1$ b) $\max/\min f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ når $0\leq x,y\leq 2$
c) $\max/\min f(x,y)=e^{xy-x-y}$ når $0\leq x,y\leq 2$ d) $\max/\min f(x,y)=xy(x^2-y^2)$ når $-1\leq x,y\leq 1$
e) $\max/\min f(x,y)=(x^2-1)(y^2-1)$ når $-1\leq x,y\leq 1$

Oppgave 8.
Finn maksimums- og minimumsverdien i optimeringsproblemet

$$\max/\min f(x,y)=\sqrt{xy}-x \text{ når } 0\leq x,y\leq 1$$

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*
Oppgaveboken [O]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver:	[E] 7.4.3 - 7.4.4, 7.6.1 - 7.6.3, 7.7.1 - 7.7.2
Fullstendig løsning:	Se [O] Kap 7.4, 7.6, 7.7

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $c=0$, nivåkurvene er rette linjer b) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

c) $f(x,y)\approx 2(x-1)-(y-1)$, $f(1.1,0.9)\approx 0.3$ d) $z=2x-y-1$

Oppgave 2.
$f_{\max} = 1,\ f_{\min} = 0$

Oppgave 3.

a) $f_{\min} = 0$ i (0,0), og $f_{\max} = 208$ i $(\pm 4, \pm 4)$

b) $f_{\min} = -15$ i $(0, \pm 4)$ og $(\pm 4{,}0)$, og $f_{\max} = 225$ i $(\pm 4, \pm 4)$

c) $f_{\min} = 64$ i $(\pm 4{,}0)$, og $f_{\max} = 144$ i $(0, \pm 4)$

d) $f_{\min} = 0$ i (1,1) og $(-1, -1)$, og $f_{\max} = 225$ i (4,4) og $(-4, -4)$

Oppgave 4.
Randpunkter er gitt ved likningen $y(x-2) = 3$, det vil punkter på grafen til $y = 3/(x-2)$ (en hyperbel). Indre punkt er gitt ved $y(x-2) < 3$, det vil si punkter under hyperbelen når $x > 2$, og punkter over hyperbelen når $x < 2$, samt alle punkter med $x = 2$. Mengden D er ikke kompakt (lukket men ikke begrenset).

Oppgave 5.

a) Nei	b) Nei	c) Nei	d) Ja	e) Nei	f) Ja	g) Ja	h) Ja
i) Nei	j) Nei	k) Nei	l) Nei	m) Ja	n) Ja	o) Nei	p) Nei

Oppgave 7.

a) $f_{\max} = 1,\ f_{\min} = -1$

b) $f_{\max} = 8,\ f_{\min} = -1$

c) $f_{\max} = 1,\ f_{\min} = 1/e^2$

d) $f_{\max} = 2\sqrt{3}/9,\ f_{\min} = -2\sqrt{3}/9$

e) $f_{\max} = 1,\ f_{\min} = 0$

Oppgave 8.
$f_{\max} = 1/4,\ f_{\min} = -1$