Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Klassifiser de stasjonære punktene til f som lokale maksimumspunkt, lokale minimumspunkt eller sadelpunkt:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 2.
Klassifiser de stasjonære punktene til f som lokale maksimumspunkt, lokale minimumspunkt eller sadelpunkt:

a) $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)$
b) $f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$
c) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Oppgave 3.
Finn likningen for nivåkurven til f som går gjennom punktet $(1,1)$ og tangentlinjen til nivåkurven i dette punktet:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 4.
Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$.

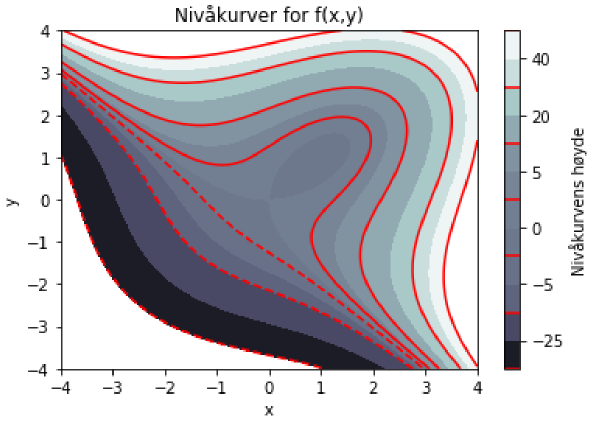
a) Vis at nivåkurven $f(x,y) = c$ er en ellipse når $c > -1$, og bestem sentrum (x_0,y_0) for ellipsen og dens halvakser a og b. Bruk dette til å skissere nivåkurvene for $c = 0, 1, 2, 3$ i samme koordinatsystem.
b) Finn tangentlinjene til nivåkurven gjennom $(x,y) = (1,1)$ og gjennom $(x,y) = (2,1/2)$, og tegn inn tangentene.
c) Finn $\nabla f(1,1)$ og $\nabla f(2,1/2)$, og tegn disse inn. Hva skjer med funksjonsverdiene langs gradienten?
d) Ser det ut som om funksjonen f har en minimums- eller maksimumsverdi? Forklar hvorfor/hvorfor ikke.

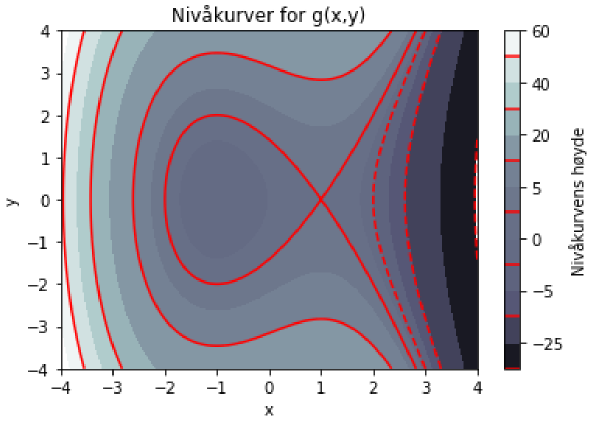
Oppgave 5.
Vi ser på nivåkurven $f(x,y) = c$ til funksjonen $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$. Hva slags kurve er dette? Beskriv gradienten til f i et punkt på nivåkurven geometrisk.

Oppgave 6.
Finn gradienten $\nabla f(1,1)$ til f i punktet $(1,1)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
https://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/
Handelshøyskolen BI
Siviløkonomstudiet





Oppgave 7.
Nivåkurver for to funksjoner f og g i området $-4 \leq x,y \leq 4$ er vist i figurene ovenfor.

a) Finn eventuelle lokale maksimumspunkter, minimumspunkter og sadelpunkter på tegningen.

b) Funksjonene f og g er to av funksjonene fra Oppgave 1. Hvilke?

Oppgave 8.
Vis at gradienten $\nabla f(a,b)$ står normalt på tangentlinjen til nivåkurven $f(x,y) = c$ i punktet (a,b), og at f vokser om vi går et kort stykke langs gradienten.

Oppgave 9.
Finn globale maksimums- og minimumspunkter, hvis de finnes:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$
e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*
Oppgaveboken [O]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver:	[E] 7.4.1 - 7.4.4, 7.5.1 - 7.5.3, 7.6.1 - 7.6.3
Fullstendig løsning:	Se [O] Kap 7.4 - 7.6

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) ingen
b) (0,0) er lokalt min
c) (0,0) er lokalt min
d) (1,0) er lokalt min
e) (0,0) er sadelpunkt, (1,1) er lokalt min
f) (1,0) er sadelpunkt, $(-1,0)$ er lokalt min
g) (0,0) er lokalt maks, $(\pm 1, \pm 1)$ er sadelpunkt
h) ingen

Oppgave 2.

a) (0,0) er sadelpunkt

b) (0,0) og $(0,-1)$ er sadelpunkt, $(3/25,-3/5)$ er lokalt maks

c) (0,0) er lokalt max (og globalt max)

Oppgave 3.

a) $2x+3y=5$, $y=-2x/3+5/3$

b) $x^2+y^2=2$, $y=-x+2$

c) $4x^2-6xy+9y^2=7$, $y=-x/6+7/6$

d) $x^2-2x+4y^2=3$, $y=1$

e) $x^3-3xy+y^3=-1$, ingen tangentlinje

f) $y^2-x^3+3x=3$, $y=1$

g) $x^2y^2-x^2-y^2+3=2$, ingen tangentlinje

h) $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$, $y=-x+2$

Oppgave 4.

a) Ellipser med sentrum i (1,0) med halvakser $a=\sqrt{c+1}$ og $b=\sqrt{c+1}/2$.

b) Tangentlinjene har likning $y=1$ og $y=-x/2+3/2$.

c) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$, og $\nabla f(2,1/2)=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, og funksjonsverdiene øker når vi beveger oss langs gradienten.

d) Ingen maksimumsverdi (halvaksen blir større jo større c er). Minimumsverdi $f(1,0)=-1$.

Oppgave 5.

Kurven er en sirkel med sentrum i $(-2,1)$ og radius $\sqrt{c+5}$. Gradienten peker bort fra sirkelens sentrum.

Oppgave 6.

a) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

b) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

c) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$

d) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$

e) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

f) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

g) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Oppgave 7.

a) f har lokalt min. i (1,1) og sadelpunkt i (0,0), og g har lokalt min. i $(-1,0)$ og sadelpunkt i (1,0)

b) f er funksjonen i e) og g er funksjonen i f)

Oppgave 9.

a) ingen globale maks./min.

b) (0,0) er globalt min.

c) (0,0) er globalt min.

d) (1,0) er globalt min.

e) ingen globale maks./min.

f) ingen globale maks./min.

g) ingen globale maks./min.

h) (0,0) er globalt min.