Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Finn det naturlige definisjonsområdet D_f og verdimengden V_f til f:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ b) $f(x,y) = \sqrt{x + 3y}$ c) $f(x,y) = (2x - y)^{-3/2}$ d) $f(x,y) = 17x^{1.2}y^{3.4}$

Oppgave 2.
Vi ser nivåkurven $f(x,y) = c$ til en funksjon $f(x,y)$. Tegn inn nivåkurvene for de oppgitte verdiene av c i samme koordinatsystem, og avgjør hva slags kurve vi får når vi lar c være en hvilken som helst verdi:

a) $f(x,y) = 12x - 3y$ og $c = -3, 0, 3$ b) $f(x,y) = xy$ og $c = -1, 0, 1$
c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$ og $c = -9, -5, -1$ d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ og $c = -2, -1, 0, 1$

Oppgave 3.
Bruk nivåkurvene $f(x,y) = c$ fra Oppgave 2 til å avgjøre om funksjonen har maksimums- eller minimumsverdier:

a) $f(x,y) = 12x - 3y$ b) $f(x,y) = xy$
c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$ d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

Oppgave 4.
Beskriv grafen til $f(x,y) = 3x - 4y + 1$ geometrisk. Med geometrisk beskrivelse mener vi for eksempel: *Grafen til $f(x) = 3 - 2x$ er en rett linje med stigningstall -2 som skjærer y-aksen i $y = 3$*, altså en presis geometrisk beskrivelse uten bruk av likninger eller liknende.

Oppgave 5.
Finn de partiellderiverte f'_x og f'_y når

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$ h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 6.
Finn Hesse-matrisen $H(f)$, og regn ut $H(f)(1,1)$:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$ h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 7.
Finn de stasjonære punktene til f:

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ c) $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$
d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$ e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ f) $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$
g) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$ h) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Oppgave 8.
Finn alle stasjonære punkter:

a) $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)$ b) $f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$ c) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*
Oppgaveboken [O]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver:	[E] 7.1.1 - 7.1.4, 7.2.1 - 7.2.3, 7.3.1 - 7.3.5
Fullstendig løsning:	Se [O] Kap 7.1 - 7.3

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $D_f = \mathbb{R}^2,\ V_f = \mathbb{R}$

b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \geq 0\},\ V_f = [0,\infty)$

c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y > 0\},\ V_f = (0,\infty)$

d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\},\ V_f = [0,\infty)$

Oppgave 2.

a) Rett linje med stigningstall 4 som skjærer y-aksen i $y = c/3$

b) Hyperbel $y = c/x$ hvis $c \neq 0$, og de to aksene hvis $c = 0$

c) Sirkel med radius $\sqrt{c+5}$ og sentrum $(-1,2)$ hvis $c > -5$, ett punkt $(-1,2)$ hvis $c = -5$, ingen punkter ellers

d) Ellipser med sentrum i $(1,0)$ med halvakser $a = \sqrt{c+1}$ og $b = \sqrt{c+1}/2$ når $c > -1$, ett punkt $(1,0)$ hvis $c = -1$, og ingen punkter ellers

Oppgave 3.

a) Hverken maksimum eller minimum

b) Hverken maksimum eller minimum

c) Ikke maksimum men minimumsverdien er $f_{min} = -5$

d) Ikke maksimum men minimumsverdien er $f_{min} = -1$

Oppgave 4.

Grafen er planet som skjærer z-aksen i $z = 1$ og har normalvektor $(3,-4,-1)$.

Oppgave 5.

a) $f'_x = 2,\ f'_y = 3$

b) $f'_x = 2x,\ f'_y = 2y$

c) $f'_x = 8x - 6y,\ f'_y = -6x + 18y$

d) $f'_x = 2x - 2,\ f'_y = 8y$

e) $f'_x = 3x^2 - 3y,\ f'_y = -3x + 3y^2$

f) $f'_x = -3x^2 + 3,\ f'_y = 2y$

g) $f'_x = 2x(y^2-1),\ f'_y = 2y(x^2-1)$

h) $f'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Oppgave 6.

a) $H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $H(f) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$, $H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$

d) $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

e) $H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$, $H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

f) $H(f) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

g) $H(f) = \begin{pmatrix} 2(y^2-1) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{pmatrix}$, $H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

h) $H(f) = (x^2+y^2)^{-3/2} \cdot \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$, $H(f)(1{,}1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$

Oppgave 7.

a) ingen
b) (0,0)
c) (0,0)
d) (1,0)
e) (0,0), (1,1)
f) (1,0), $(-1{,}0)$
g) (0,0), $(\pm 1, \pm 1)$
h) ingen

Oppgave 8.

a) (0,0)
b) (0,0), $(0,-1)$, $(3/25, -3/5)$
c) (0,0)