Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Finn A^{-1}, dersom det er mulig:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Oppgave 2.
Bestem de verdiene av a som er slik at den inverse matrisen til A eksisterer, og regn ut A^{-1} i disse tilfellene:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 3.
Vi ser på det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

a) Løs systemet når $t = 2$.

b) Avgjør hvor mange løsninger systemet har for ulike verdier av t.

c) Finn den inverse matrisen A^{-1} når den eksisterer, og bruk dette til å løse systemet i disse tilfellene.

Oppgave 4.
Skriv uttrykkene enklest mulig:

a) $(A+B)^2$ b) $(A^TA)^T$ c) $A(3B-C)+(A-2B)C+2B(C+2A)$

d) $A^{-1}(BA)$ e) $(BAB^{-1})^2 \cdot B^2$ f) $(A-B)(C-A)+(C-B)(A-C)+(C-A)^2$

Oppgave 5.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ med parameter a, gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \\ 51 \end{pmatrix}$$

a) Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 2$. Marker pivot-posisjonene.

b) Regn ut $\det(A)$, og bestem alle verdier av a slik at $\det(A) = 0$.

c) Finn A^{-1} når $a = 3$.

d) Vis at $A^7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har eksakt én løsning for $a = -1$, og uttrykk løsningen $\mathbf{x}$ ved A og $\mathbf{b}$.

Oppgave 6.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ med parameter a, gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & a \\ 5 & 12 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

a) Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 0$. Marker pivot-posisjonene.

b) Bestem alle verdier av a slik at det lineære systemet er konsistent.

c) Uttrykk vektoren $\mathbf{w} = (2,1,0)$ som en lineær-kombinasjon av de fire kolonnevektorene til A for alle verdier av a der dette er mulig.

Oppgave 7.
En kvadratisk matrise E kalles elementær hvis den framkommer ved å utføre én enkelt elementær radoperasjon på en identitetsmatrise.

a) Vis at elementære matriser har en invers.

b) Undersøk hvilken effekt det har å multiplisere en kvadratisk matrise A med en elementær matrise E fra venstre: $A \to E \cdot A$. Bruk gjerne eksempeler for å undersøke dette.

c) Anta at det finnes r elementære matriser $E_1, E_2, \dots E_r$ slik $E_1 \cdot E_2 \cdots E_r \cdot A = I$. Vis at i så fall er A invertibel, og finn et uttrykk for A^{-1}.

Oppgaver fra læreboken

Læreboken [E]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans*
Oppgaveboken [O]:	Eriksen, *Matematikk for økonomi og finans - Oppgaver og Løsningsforslag*

Oppgaver:	[E] 6.7.1 - 6.7.5
Fullstendig løsning:	Se [O] Kap 6.7

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.

a) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

c) A^{-1} ikke definert

d) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

f) A^{-1} ikke definert

Oppgave 2.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ for $a \neq -1,\ 1$

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{6a}\begin{pmatrix} 2a & -2 & 1-a^2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}$ for $a \neq 0$

c) $A^{-1} = \dfrac{1}{(1-a)(1+3a)}\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 1-3a \\ a-1 & 1-a^2 & a-1 \\ 1-3a & a-1 & 2 \end{pmatrix}$ for $a \neq -1/3, 1$

Oppgave 3.

a) $(x,y,z) = (2/3,0,2/3)$

b) Uendelig mange løsninger for $t = 0$ og $t = 1$, ingen løsninger for $t = -1$, og én løsning for $t \neq -1,0,1$

c) $A^{-1} = \dfrac{1}{t(t^2-1)}\begin{pmatrix} t^2 & 0 & -t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ -t & 0 & t^2 \end{pmatrix}$ for $t \neq -1,0,1$, løsningene er $(x,y,z) = \left(\dfrac{t}{t+1}, 0, \dfrac{t}{t+1}\right)$ for $t \neq -1,0,1$

Oppgave 4.

a) $A^2 + AB + BA + B^2$ b) $A^T A$ c) $3AB{+}4BA$ d) $A^{-1}BA$ e) BA^2B f) 0

Oppgave 5.

a) $(7-2y,y,1)$ der y er fri

b) $-32a^2 + 140a - 152$, $a = 2$ eller $a = 19/8$

c) $\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 36 & 4 & -12 \\ -20 & -5 & 10 \end{pmatrix}$

d) $(A^{-1})^7 \cdot \mathbf{b}$

Oppgave 6.

a) $(38-3z, z-15, z, -2)$ der z er fri

b) $a \neq 1/2$

c) $\mathbf{w} = 12\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2$ (det finnes også andre løsninger)