MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2024
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 21 – 22

Kap 4.8-9: l'Hôpitals regel. Grenseinntekt og grensekostnad.

[L] **4.8** 1-2
[L] **4.9** 1-2, 5-6

Flervalgseksamen 2016v oppg 13
Flervalgseksamen 2016h oppg 14
Flervalgseksamen 2018v oppg 12

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 7. nov. kl 10-16+.

Oppgave 1 Beregn grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x}{25(x-1)}$ b) $\lim\limits_{x\to \ln 5} \dfrac{e^x-5}{x^2-5}$ c) $\lim\limits_{x\to \ln 5} \dfrac{e^x-5}{x^2-(\ln 5)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x}{e^x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{10}}{e^x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{e^{2x}-e^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$ i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x^2-3x+2}-1}{x^2-4}$

Oppgave 2 Beregn grenseverdiene ved å bruke l'Hôpitals regel.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{25(x-1)}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{2x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+10}{e^x-5}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

Oppgave 3 Forklar hvorfor $K(x)$ er en kostnadsfunksjonen ved å sjekke de tre kriteriene:
(1) $K(0)>0$
(2) $K(x)$ er en voksende funksjon
(3) $K(x)$ er en konveks funksjon
Bestem også konstandsoptimum og hva enhetskostnaden er ved kostnadsoptimum.

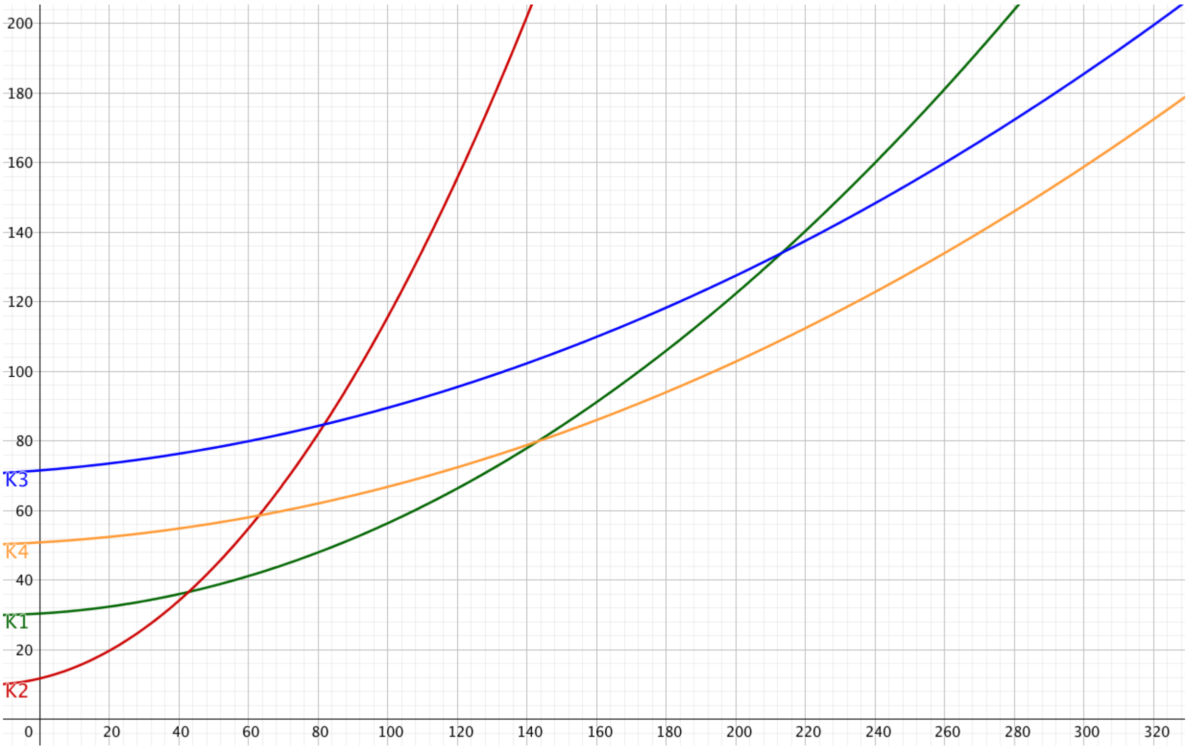
a) $K(x)=0{,}01x^2+8x+2500,\ x\geqslant 0$ b) $K(x)=0{,}05(x+200)^2,\ x\geqslant 0$

c) $K(x)=400e^{0{,}001x^2},\ x\geqslant 0$ d) $K(x)=50x+1000,\ 0\leqslant x\leqslant 1000$

Oppgave 4 $K(x)$ er kostnadsfunksjonen, $I(x)$ er inntektsfunksjonen og x er antall produserte og solgte enheter. Finn profittmaksimerende kvantum.
a) $K(x)=0{,}01x^2+8x+2500$ og $I(x)=100x$ for $x\geqslant 0$
b) $K(x)=0{,}005x^2+20x+30000$ og $I(x)=50x$ for $0\leqslant x\leqslant 2000$

Oppgave 5 I figur 1 ser du grafen til fire forskjellige kostnadsfunksjoner.

a) Lage en rekkefølge av kostnadsfunksjonene fra den med minste optimale (minimale) enhetskostnad til den med største optimale enhetskostnad.
b) Finn en tilnærmet verdi for kostnadsoptimum for hver av kostnadsfunksjonene.
c) Finn en tilnærmet verdi for optimal (minimal) enhetskostnad for hver av kostnadsfunksjonene.



Figur 1: Fire kostnadsfunksjoner (K_1–K_4)

Oppgave 6 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 4)
En bedrift har kostnadsfunksjonen $C(x) = 205x^3 - 120x^2 + 2000x + 2800$ når $x \geqslant 0$. Hva er den minimale enhetskostnaden?

(A) 2 kr
(B) 12 kr
(C) 3980 kr
(D) 7960 kr
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 7 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 14)
Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x\ln(x)}{e^x}$$

Hvilket utsagn er sant?

(A) Grenseverdien eksisterer ikke
(B) Grenseverdien er 1
(C) Grenseverdien er $-\frac{1}{2}$
(D) Grenseverdien er 0
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2015h, oppg 15)
Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Hvilket utsagn er sant?
(A) Grenseverdien eksisterer ikke
(B) Grenseverdien er 0
(C) Grenseverdien er 1
(D) Grenseverdien er $-\frac{1}{2}$
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2018h, oppg 14)
Vi har en kurve definert implisitt ved likningen $4x^2 - 7xy + 4y^2 = 16$. Hvilket utsagn er sant?
(A) Det finnes bare ett punkt på kurven med x-koordinat 4 og stigningstallet til tangenten i dette punktet er -1
(B) Det finnes to punkter på kurven med x-koordinat 4 og produktet av stigningstallene til tangentene i disse punktene er $-2{,}75$
(C) Det finnes to punkter på kurven med x-koordinat 4 og produktet av stigningstallene til tangentene i disse punktene er -64
(D) Det finnes to punkter på kurven med x-koordinat 4 og produktet av stigningstallene til tangentene i disse punktene er $\frac{1024}{425}$
(E) Jeg velger å ikke svare på denne oppgaven.

Fasit

Oppgave 1

a) $\frac{-3}{25(3-1)} = -0{,}06$ b) 0 c) $\frac{5}{2\ln 5}$

d) 7 e) 0 f) $0{,}5$

g) $\frac{1}{2e^2}$ h) 2 i) $\frac{1}{4}$

Oppgave 2

a) $\frac{-1}{25}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$ d) 0

Oppgave 3

a) $K(0) = 2500 > 0$, $K'(x) = 0{,}02x + 8 > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}02 > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 500$ gir minimal enhetskostnad $A(500) = 18$

b) $K(0) = 2000 > 0$, $K'(x) = 0{,}1x + 20 > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}1 > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 200$ gir minimal enhetskostnad $A(200) = 40$

c) $K(0) = 400 > 0$, $K'(x) = 0{,}8xe^{0{,}001x^2} > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}8(1 + 0{,}002x^2)e^{0{,}001x^2} > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 22{,}36$ gir minimal enhetskostnad $A(22{,}36) = 29{,}49$

d) $K(0) = 1000 > 0$, $K'(x) = 50 > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0 \geqslant 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 1000$ gir minimal enhetskostnad $A(1000) = 51$

Oppgave 4

a) For $x = 4600$ er grensekostnad lik grenseinntekt og $\pi''(x) = -0{,}02 < 0$ gir at profittfunksjonen er konkav og dermed er $x = 4600$ et profittmaksimerende kvantum.

b) For $x = 3000$ er grensekostnad lik grenseinntekt, men dette ligger utenfor gyldighetsområdet (definisjonsområdet) for modellen. Vi ser at $\pi'(x) = 30 - 0{,}01x$ er positiv for $x < 3000$ som gir at profittfunksjonen er voksende for x i intervallet $[0\,,2000]$ og dermed er $x = 2000$ et profittmaksimerende kvantum.

Oppgave 5

a) K_4, K_1, K_3, K_2

b) $K_4:\ x = 220,\ \ K_1:\ x = 120,\ \ K_3:\ x = 270,\ \ K_2:\ x = 40$

c) $A_4(220) = \frac{112}{220} = 0{,}51,\ \ A_1(120) = \frac{65}{120} = 0{,}54,\ \ A_3(270) = \frac{165}{270} = 0{,}61,\ \ A_2(40) = \frac{35}{40} = 0{,}88$

Oppgave 6 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 4)
C

Oppgave 7 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 14)
D

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2015h, oppg 15)
D

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2018h, oppg 14)
B