

MET1180, forelesning 9, 19. sept. 2024, Runar Iler

- Plan
1. Rasjonale likninger
 2. Irrasjonale likninger
 3. Ulikheter

1. Rasjonale likninger

En rasjonal likning:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad \text{polynomer}$$

Eks $\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 0$

Da er $x+1=0$ og $(x-1)(x+3) \neq 0$, dvs

$$x \neq 1, x \neq -3$$

Så $x = -1$ er eneste løsning

Eks (Oppg 10a fra forrige uke)

Likh. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} = 0 \quad (*)$

VS er en geometrisk rekke med

første ledd $a_1 = 1$, multiplikator $k = x$, antall ledd $n = 100$

Da gir formelen VS i likningen: $1 \cdot \frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 0 \quad (**)$

dvs $x^{100} - 1 = 0$ og $x - 1 \neq 0$

$$x^{100} = 1 \quad \text{gir} \quad x = \pm 1^{\frac{1}{100}} = \pm 1$$

Men $x \neq 1$, så $(**)$ har $x = -1$ som eneste løsn.

Må sjekke $x = 1$ separat i $(*)$:

$$VS = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^{99} = 100 \neq 0 = HS$$

Så $x = -1$ er eneste løsning på likningen $(*)$.

Eks $\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 2 \quad | -2 \quad (x \neq 1, x \neq -3)$ (*)

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} - 2 = 0$$

setter på felles nevner: Multipliserer -2 med $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)}$ som er lik 1.

$$\frac{x+1 - 2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0$$

Løser opp parenteser og trekker sammen i teller (ikke i nevner!)

$$\frac{x+1 - 2(x^2 + 2x - 3)}{(x-1)(x+3)} = 0$$

$$\frac{-2x^2 - 3x + 7}{(x-1)(x+3)} = 0$$

- finner nullpunktene (røttene) til telleren og sjekker at de ikke er 1 eller -3.

2. Irrasjonale likninger

- den ukjente (x-en) står under en rot!

Eks $2 \cdot \sqrt{x+1} = x-2 \quad (x \geq -1)$ (*)

Kvadrerer på begge sider

$$4 \cdot (x+1) = (x-2)^2$$

$$4x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$\text{får } x^2 - 8x = 0$$

$$\text{dvs } x \cdot (x - 8) = 0 \text{ så } \underline{x=0} \text{ el. } \underline{x=8}$$

- dette er kandidatløsninger - må testes
(tenk: $-3 \neq 3$, men $(-3)^2 = 9 = 3^2$)

$$\begin{array}{l} \underline{x=0} \quad \text{VS: } 2 \cdot \sqrt{0+1} = 2\sqrt{1} = 2 \\ \quad \quad \quad \text{HS: } 0 - 2 = -2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \underline{x=0} \\ \text{VS: } 2 \cdot \sqrt{0+1} = 2\sqrt{1} = 2 \\ \text{HS: } 0 - 2 = -2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{ikke like!} \\ x=0 \text{ er ikke} \\ \text{en løsning av (*)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x=8} \quad \text{VS: } 2 \cdot \sqrt{8+1} = 2\sqrt{9} = 6 \\ \quad \quad \quad \text{HS: } 8 - 2 = 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \underline{x=8} \\ \text{VS: } 2 \cdot \sqrt{8+1} = 2\sqrt{9} = 6 \\ \text{HS: } 8 - 2 = 6 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{er like! - så} \\ \underline{x=8} \text{ er eneste} \\ \text{løsning på (*)}. \end{array}$$

3. Ulikheter

Start: 9.00

$-2 < -1$ leses: "minusto er mindre enn minus en"

$\frac{1}{9} > \frac{1}{12}$ leses: "en niedel er større enn en tolvdel"

Også \leq og \geq

- En ulikhet er en påstand om at ett uttrykk (tall) er mindre enn (større enn... et annet uttrykk (tall).
- Løsningene på ulikheten er de x-verdiene som gjør påstanden sann.

EKS $x-1 \geq 2$ - en påstand!

- er sann hvis $x=5$ fordi $5-1=4 \geq 2$ er sant

- er usann hvis $x=2$ fordi $2-1=1 \geq 2$ er usant

Alle løsningene: $x \geq 3$ - uendelig mange løsn.

- kan også skrive slik: $x \in [3, \infty)$

og slik: $x \in [3, \rightarrow)$

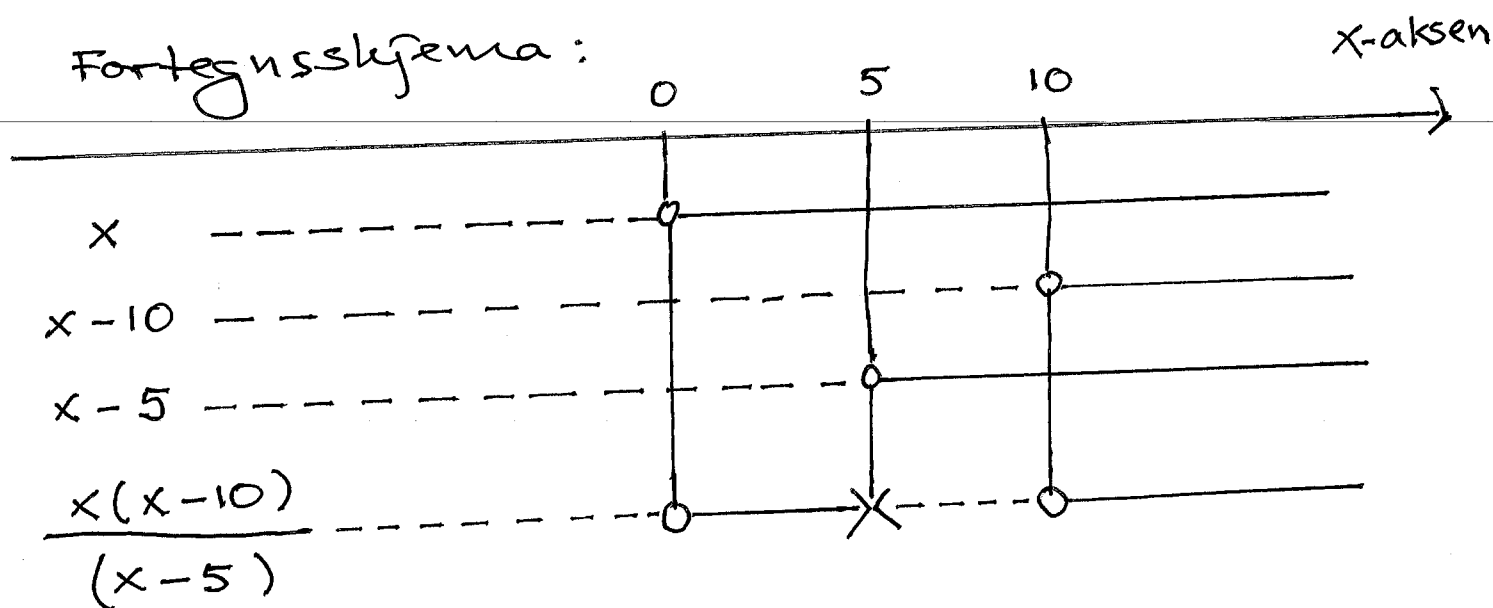
EKS løs ulikheten $\frac{x(x-10)}{(x-5)} \geq 0$

Løsning Fordi vi har 0 på HS og en
ferdig faktorisert brøk på VS,
kan vi bruke fortegnsskjema direkte.

Merk Nullpunktene: teller: $x=0$, $x=10$

————||———— nevner: $x=5$

Fortegnsskjema:



dos (løshingen) $\underline{\underline{0 \leq x < 5 \text{ eller } x \geq 10}}$

alternative skrivemåte $\underline{\underline{x \in [0, 5) \text{ d. } x \in [10, \rightarrow)}}$

EKS (Fagprøve 2020h)

Løs ulikheten $\frac{2x - 12}{(x-3)(x+4)} \geq 1$

Løsning Vi har ikke 0 på HS og kan derfor ikke bruke fortegnsskema direkte. Trekker fra 1 på BS og lager felles nevner:

$$\frac{2x - 12}{(x-3)(x+4)} - 1 \cdot \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

Skriver VS som én brøk:

$$\frac{2x - 12 - (x-3)(x+4)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

Løser opp og trekker sammen i teller (ikke i nevner)

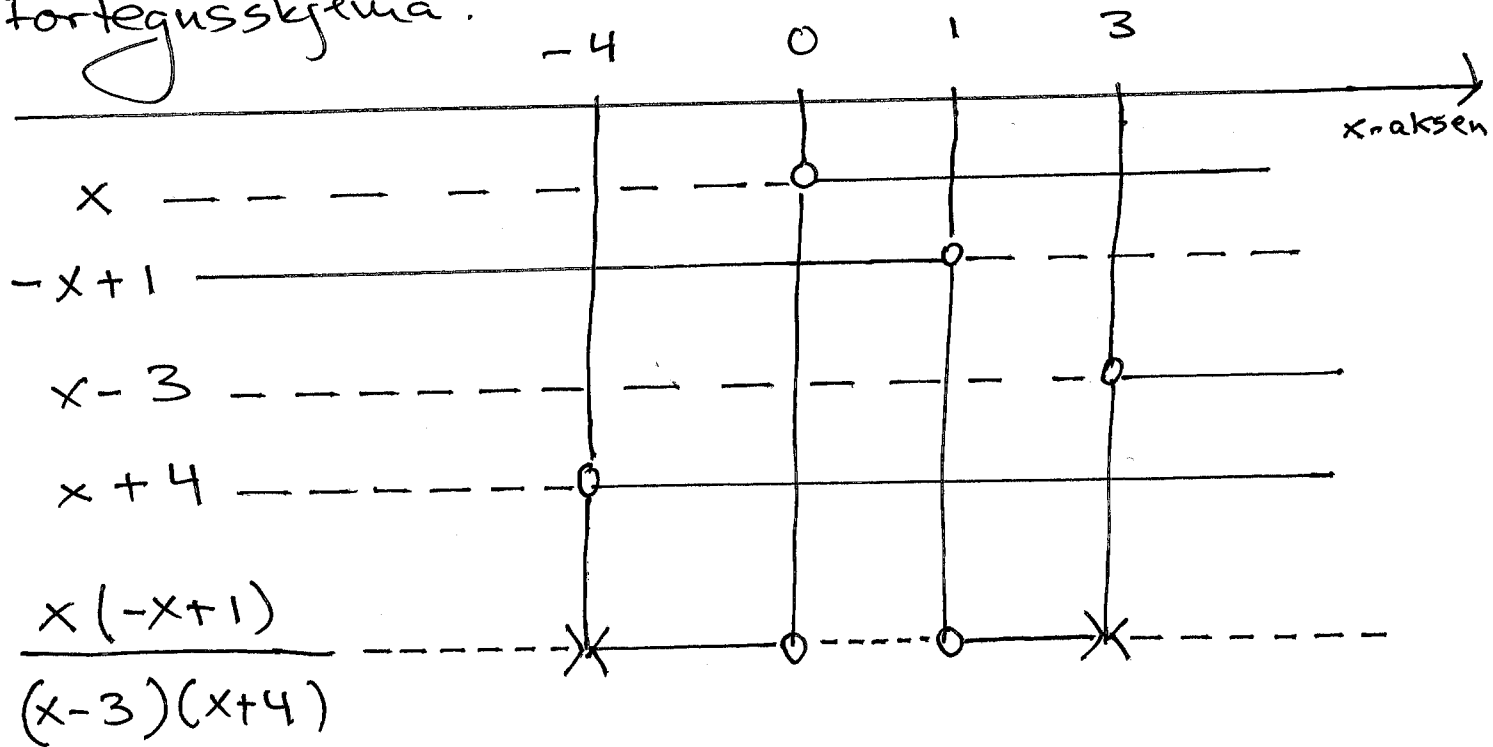
$$\frac{2x - 12 - (x^2 + x - 12)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2 + x}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{x(-x+1)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

Merk teller har nullpunkter $x=0$ og $x=1$
nevner $x=3$ og $x=-4$

Fortegnsskjema:



Så $-4 < x \leq 0$ eller $1 \leq x < 3$