MET 1180, forelesning 8, 17. sept. 2024, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon (oppg. fra forrige uke)
2. Polynomdivisjon og faktorisering

1. Repetisjon

2m) Løs likningen $9x^2 - 6x + 1 = 0 \quad | :9$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

Fullfører kvadratet: $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0$

så $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0$ dvs $x - \frac{1}{3} = 0$ dvs $\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$

Alternativ løsning: $\underline{u = 3x}$ gir $u^2 = 3x \cdot 3x = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$

og $-6x = -2 \cdot 3x = -2u$

Likningen blir $u^2 - 2u + 1 = 0$

Fullfører kvadratet: $(u-1)^2 = 0$

så $u - 1 = 0$

så $3x = u = 1$

så $\underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$

3e) Bestem andregradslikningen med løsningen $x = 3 \pm \sqrt{5}$,

dvs $x = 3 + \sqrt{5}$, $x = 3 - \sqrt{5}$

(tenk: $(x-3)^2 = 5$ har disse løsningene)

Da har vi

$$\left(x-(3+\sqrt{5})\right)\cdot\left(x-(3-\sqrt{5})\right)$$

$$\begin{cases} -(3-\sqrt{5})x-(3+\sqrt{5})x \\ -3x+\sqrt{5}x-3x-\sqrt{5}x \\ =-6x. \end{cases}$$

$$= x^2-6x+(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = x^2-6x+9-5$$

$$= x^2-6x+4$$

så likningen $x^2-6x+4=0$ har de oppgitte løsningene. (Her er $b=-6=-\left[(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})\right]$ og $c=4=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$)

5c) Bestem k slik at likningen $\frac{1}{k}\cdot x^2-14x=12$ har akkurat én løsning.

$k\cdot \Big|$ – merk at $k\neq 0$!

$$x^2-14kx=12k$$

Fullfører kvadratet

$$(x-7k)^2=12k+(7k)^2$$

har akkurat én løsning hvis og bare hvis h.s. $=0$ dvs $12k+49k^2=0$

dvs $k\cdot(12+49k)=0$

dvs $k=0$ eller $12+49k=0$

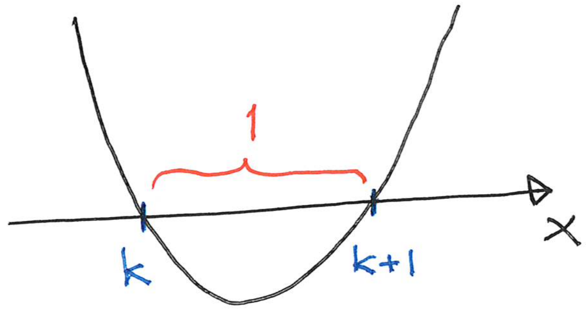
– ikke gyldig! dvs $\underline{\underline{k=-\frac{12}{49}}}$

<u>Parametre</u> Tall som ikke er spesifiserte, som kommer „utenifra", skal ikke løses med likningen.

Økonomene kaller parametre for „eksogene variabler" (og x-ene kaller de for „endogene variabler")

7a) Alle polynomer $x^2 + bx + c$ som har to røtter (nullpunkter) med avstand 1 mellom hverandre kan skrives som

$$\overbrace{(x-k)}^{\text{nullpkt } x=k}\cdot\underbrace{(x-(k+1))}_{\text{nullpkt. } x=k+1}$$

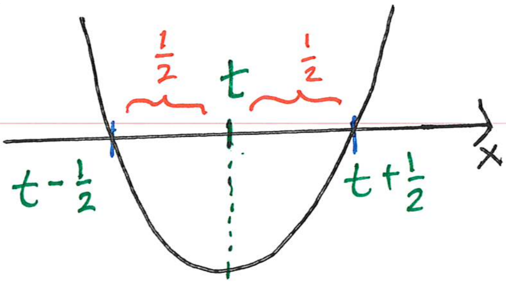


$$= \underline{\underline{x^2-(2k+1)x+k(k+1)}}$$

$b = -(2k+1)$, $c = k(k+1)$

for en parameter k som er den minste roten (k er et tall på tallinjen).

<u>Alternativ løsning</u>



Får

$$\left(x-\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(x-\left(t+\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{x^2 - 2tx + t^2 - \tfrac{1}{4}}}$$

Faktisk er det uendelig mange korrekte løsninger.... - dette var bare to av dem.

Start: 15.04

2. Polynomdivisjon og faktorisering

Vil dividere et polynom $f(x)$ med et polynom $g(x)$ med (evt.) restledd $r(x)$.

$$g(x)\cdot \Big| \quad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$ med $\text{grad}(r(x)) < \text{grad}(g(x))$

gir $$f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x)$$

Eks $f(x) = 3x^2+2x+1$ og $g(x) = x-2$

$$\left(\boxed{3x^2}+2x+1\right) : \left(\boxed{x}-2\right) = \overset{3x^2:x}{3x} + \overset{8x:x}{8} + \frac{17}{x-2}$$

$$\begin{array}{l} \left(3x^2+2x+1\right) \\ -\left(3x^2-6x\right) \quad \cdot(x-2) \\ \hline \quad \boxed{8x}+1 \\ \quad -\left(8x-16\right) \quad \cdot(x-2) \\ \hline \qquad\quad 17 \end{array}$$

kakes resten, $r(x) = 17$

Så $q(x) = 3x+8$ og $r(x) = 17$

Kan sjekke regningen $\left(3x+8+\frac{17}{x-2}\right)(x-2)$

$$= (3x+8)(x-2) + \frac{17}{x-2}\cdot(x-2)$$

$$= 3x^2-6x+8x-16+17 = 3x^2+2x+1 = f(x)$$

– så ok!

To anvendelser av polynomdivisjon

Ⓐ Å finne asymptoter til rasjonale funksjoner

<u>Eks</u> $$\frac{3x^2+2x+1}{x-2} = 3x+8+\frac{17}{x-2}$$

har vertikal asymptote: linjen $x=2$

og en skrå asymptote: $y=3x+8$

Ⓑ Å faktorisere et polynom i et produkt av grad 1 polynomer (lineære ledd)

<u>Eks</u> Faktorisér $x^3-4x^2-11x+30$ i lineære faktorer.

<u>Løsning</u>

<u>steg 1</u> Gjetter på en heltallsrot

Jeg prøver $\underline{x=-3}$ og får

$(-3)^3-4\cdot(-3)^2-11\cdot(-3)+30$

$=-27-36+33+30=0$.

Da er $(x-(-3))=(x+3)$ en faktor. her

<u>steg 2</u> Bruker polynomdivisjon til å finne et polynom av 1 grad mindre:

$$(x^3-4x^2-11x+30):(x+3) \overset{\text{poly. div}}{=} x^2-7x+10$$

$\vdots$ $\vdots$

Merk: resten $=0$

<u>Steg 3</u> Finner røttene til $x^2 - 7x + 10$

De er $x = 2$, $x = 5$ så $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$

Dermed er $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = \underline{\underline{(x+3)(x-2)(x-5)}}$

<u>Merk 1</u> Ikke alltid mulig å faktorisere:

$x^2 + 5$, $x^2 + 2x + 3$

– ingen røtter ingen røtter: $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$

<u>Merk 2</u> Det kan være vanskelig å gjette på røtter (men heltalls røtter må være faktorer av 30)

Noen ganger er det ikke heltallsrøtter.