MET 1180, forelesning 7, 12. sept. 2024, Runar Ile

Plan
1. Kvadratiske likninger
2. Fullføre kvadratet
3. Likninger med gitte løsninger

1. Kvadratiske likninger

- en likning som kan omformes til standardlikningen $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Har løsninger

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tre tilfeller:

$b^2 - 4ac > 0$ gir to løsninger

$b^2 - 4ac = 0$ gir én løsning

$b^2 - 4ac < 0$ gir ingen løsninger

Oppg Bestem antall løsninger.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ $5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$: to løsninger

b) $-x^2 + 2x - 1 = 0$ $2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0$: én løsning

c) $4x^2 - 5x - 5 = 0$ $(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) > 0$: to løsninger

Men abc-formelen er ofte ineffektiv:

Eks $-3x^2 + 7 = 0$ $(a = -3,\ \underline{b = 0},\ c = 7)$

$$-3x^2 = -7 \quad | : -3$$

$$x^2 = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \quad \text{så} \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

EKS $2x^2 - 6x = 0$ $(a = 2, b = -6, c = 0)$

$2(x^2 - 3x) = 0 \quad | : 2$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$ så $\underline{\underline{x = 0}}$ el. $x - 3 = 0$

$\underline{\underline{x = 3}}$

Mønster: Hvis $a \cdot b = 0$ så er

$a = 0$ eller $b = 0$ (eller begge deler)

---

2. Fullføre kvadratet

EKS $x^2 + 6x - 16 = 0$ dvs $x^2 + 6x = 16 \quad | + 9$

Påstand: $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$

– fordi $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

så $(x+3)^2 - 9 = x^2 + 6x$

$6:2$

så $(x+3)^2 = 25$

så $x + 3 = 5$ eller $x + 3 = -5$

dvs $\underline{\underline{x = 2}}$ $\underline{\underline{x = -8}}$

Oppg Løs andregradslikningen ved å fullføre kvadratet.

a) $x^2 - 8x - 33 = 0$

Løsning $x^2 - 8x = 33 \quad | + (-4)^2 = 16$

$-4 = \frac{-8}{2}$

$(x-4)^2 = 33 + 16 = 49$

så $x - 4 = 7$ eller $x - 4 = -7$

$\underline{\underline{x = 11}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{x = -3}}$

b) $x^2 + 2x = 63 \quad | + 1$

Løsning $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(x+1)^2 = 64$

dvs $x + 1 = 8$ el. $x + 1 = -8$

$\underline{\underline{x = 7}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{x = -9}}$

Start: 9.00

3. Likninger med gitte løsninger

Oppg Løs likningen $(x-4)\cdot(x+5) = 0$

Løsning Hvis produktet av to tall er lik 0:

$a \cdot b = 0$

så må minst ett av tallene være lik 0:

$a = 0$ eller $b = 0$

Så, hvis $(x-4)\cdot(x+5) = 0$ må

enten $x - 4 = 0$ eller $x + 5 = 0$

dvs $\underline{\underline{x = 4}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{x = -5}}$

Oppg Bestem andregradsuttrykket $x^2 + bx + c$ med de oppgitte røttene (nullpunkter)

a) 1 og 2 Løsning: $(x-1)(x-2) = \underline{\underline{x^2 - 3x + 2}}$

b) 11 og −3 Løsning: $(x-11)(x+3) = \underline{\underline{x^2 - 8x - 33}}$

Merk $3(x-1)(x-2) = 3x^2 - 9x + 6$ har de samme røttene: 1 og 2.

Mønster Hvis r_1 og r_2 er løsninger („røtter") til likningen $x^2 + bx + c = 0$

så vil $(x-r_1)(x-r_2) = x^2 - r_2 x - r_1 x + (-r_1)(-r_2)$

$$= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + bx + c$$

Dvs $b = -(r_1 + r_2)$ og $c = r_1 r_2$

Eks $x^2 + 6x - 16 = (x+8)(x-2)$ $\quad r_1 = -8$, $r_2 = 2$

Oppg Løs likningen

$$(x^2+1)(12+3x)\cdot(9-x^2)\cdot(x^2-3x+2) = 0$$

Løsning Et produkt som er 0: En av faktorene er 0

$x^2 + 1 = 0$ – ingen løsninger

el. $12 + 3x = 0$ dvs $3(4+x) = 0$ så $\underline{\underline{x = -4}}$

el. $9 - x^2 = 0$, $(3-x)(3+x) = 0$ så $\underline{\underline{x = 3}}$ el. $\underline{\underline{x = -3}}$

el. $x^2 - 3x + 2 = 0$ $(x-1)(x-2) = 0$ så $\underline{\underline{x = 1}}$ el. $\underline{\underline{x = 2}}$

Oppg Løs likningen $x^4 - 12x^3 + 11x^2 = 0$

Løsning $x^2(x^2 - 12x + 11) = 0$ så

enten $x^2 = 0$ eller $x^2 - 12x + 11 = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$

fullfører kvadratet:

$(x-6)^2 = -11 + 36 = 25$

$x - 6 = 5$ el. $x - 6 = -5$

$\underline{\underline{x = 11}}$ el. $\underline{\underline{x = 1}}$