MET 1180, forelesning 6, 10. sept. 2024, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon
2. Lineære og kvadratiske likninger
3. Likninger med parametre: abc-formelen

1. Repetisjon (Fagoppg. 2021h, oppg. 1a)

i) Beregn summen

$$6000\cdot 1{,}0025^{96} + 6000\cdot 1{,}0025^{95} + \ldots + 6000\cdot 1{,}0025^{26} + 6000\cdot 1{,}0025^{25}$$

Løsning Dette er en geom. rekke med

- første ledd $= 6000\cdot 1{,}0025^{25}$ (eller $6000\cdot 1{,}0025^{96}$)
- multiplikasjonsfaktor „vekstfaktor" $= 1{,}0025$ (eller $\frac{1}{1{,}0025} = 1{,}0025^{-1}$)
- antall ledd $= 96-24 = 72$ (ingen valg)

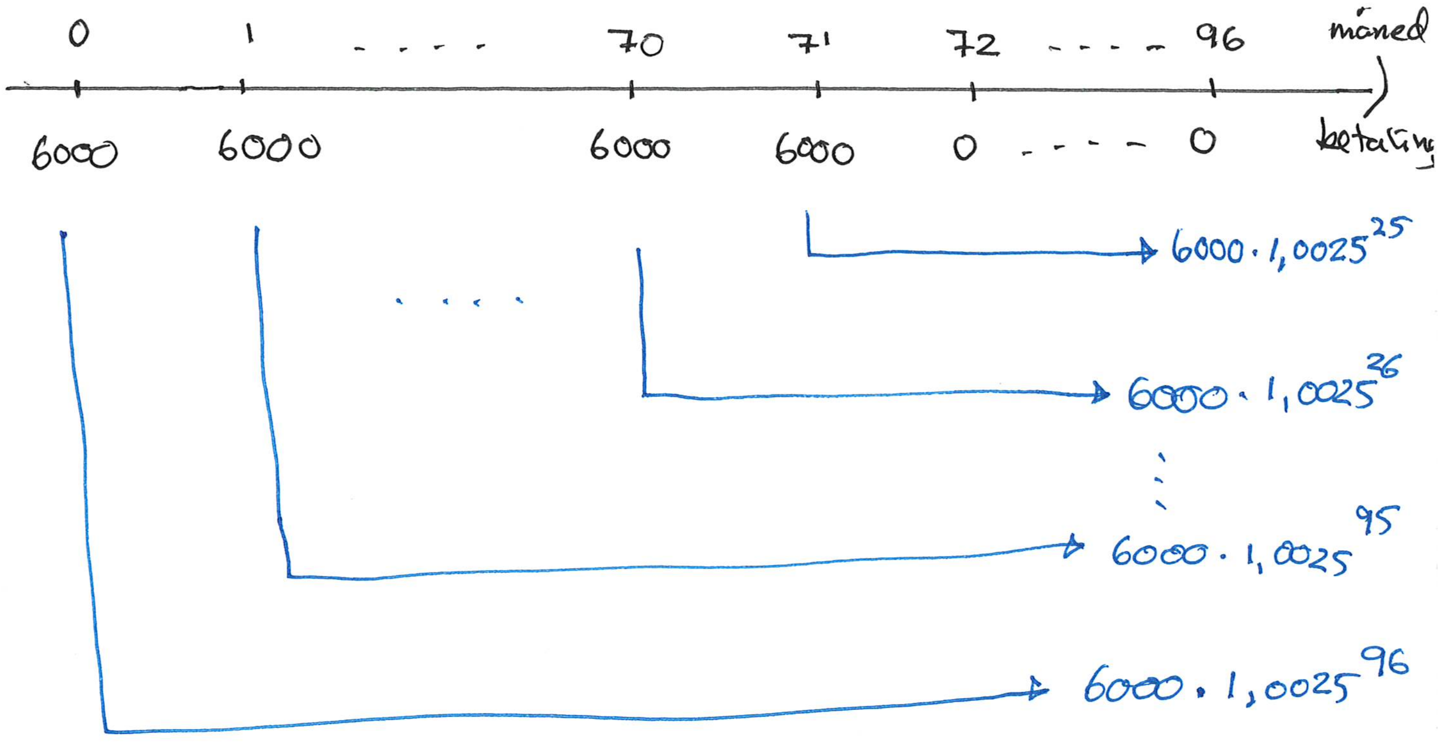
Formelen for en geometrisk rekke gir

$$a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1} = 6000\cdot 1{,}0025^{25} \cdot \frac{1{,}0025^{72}-1}{0{,}0025} = \underline{\underline{503\,122{,}08}}$$

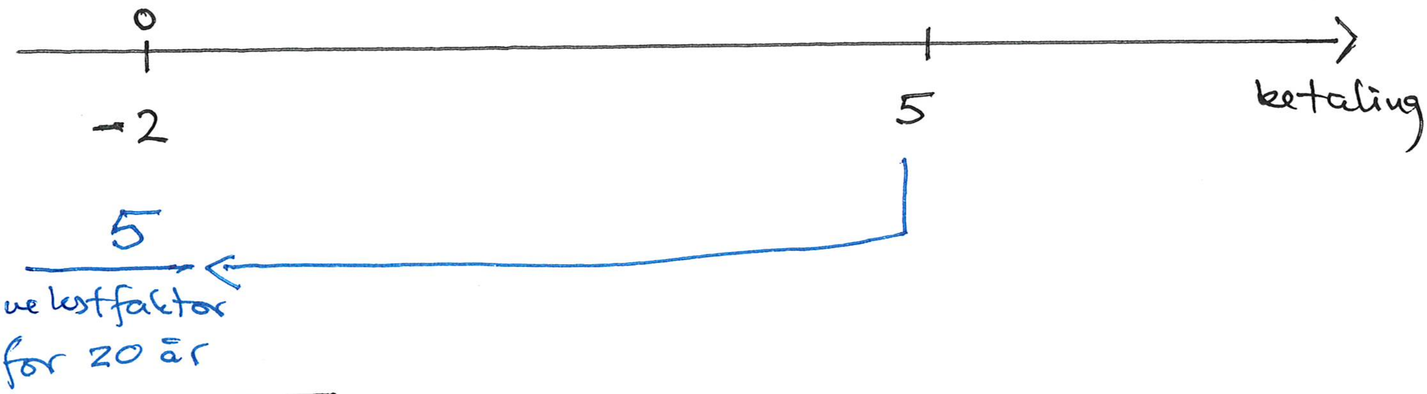
ii) Beskriv en finanssituasjon hvor denne summen er relevant (de viktige tallene skal tolkes)

Løsning Hvis vi leser summen fra venstre mot høyre er den balansen på en konto om 8 år ($= \frac{96 \text{ mnd}}{12}$) hvis 6000 settes inn hver måned i 6 år (dvs 72 innskudd) med første innskudd i dag (og det er leddet lengst til venstre), 3 % nominell årsrente (0,25 % · 12), månedlig forrentning

$$\text{perioderente} = \frac{3\%}{12} = 0{,}0025$$



<u>Oppg 5</u> (forrige uke) Du vurderer å investere 2 mill. nå for å få 5 mill. om 20 år.
Vil finne (den nominelle) internrenten til kontantstrøm.
Internrenten er den renten som gjør at nåverdien blir 0



sum = nåverdi

a) Årlig forrentning, r = internrenten for ett år.

Får likningen $-2 + \frac{5}{(1+r)^{20}} = 0 \quad \Big| \cdot (1+r)^{20}$

som gir $5 = 2 \cdot (1+r)^{20} \quad \Big| : 2$

så $(1+r)^{20} = \frac{5}{2}$ dvs $1+r = \sqrt[20]{\frac{5}{2}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$

så $r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 = \underline{\underline{4,69\ \%}}$

Kalk : 2,5 $\boxed{y^x}$ 20 $\boxed{1/x}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$

b) Med kvartalsvis forrentning vil det være $4 \cdot 20 = 80$ terminer. Med terminrente r får vi likningen

$(1+r)^{80} = \frac{5}{2}$ dvs $r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{80}} - 1$

$= 1,152\ \%$

som gir nominell årlig internrente

$4 \cdot 1,152 = \underline{\underline{4,61\ \%}}$

d) Med kontinuerlig forrentning er den årlige vekstfaktoren e^r (r = årlig, nominell internrente). Nåverdien

blir $-2 + \frac{5}{(e^r)^{20}}$ som skal være 0

Altså $(e^r)^{20} = \frac{5}{2}$ dvs $e^r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 1,0469...$

Prøver ulike verdier for r (bør være litt mindre enn 4,61 %). Et godt svar $\underline{\underline{r = 4,58\ \%}}$

(eller $r = \dfrac{\ln 5 - \ln 2}{20}$).

Start: 15.07

<u>Oppg</u> Du setter 2 mill inn på konto i dag, årlig (nominell) rente på 12 % med kontinuerlig forrentning. Bestem balansen etter 1 år og 7 måneder.

<u>Løsning</u>

$$2 \text{ mill} \cdot \underbrace{e^{0{,}12}}_{\text{vekstfaktor for 1 år}} \cdot \underbrace{\Big(\overbrace{\left(e^{0{,}12}\right)^{\frac{1}{12}}}^{\text{vekstfaktor for 1 måned}}\Big)^{7}}_{\text{vekstfaktor for 7 måneder}}$$

$$= 2 \text{ mill} \cdot e^{0{,}12} \cdot \left(e^{0{,}01}\right)^{7}$$

$$= 2 \text{ mill} \cdot e^{0{,}12+0{,}07} = 2 \text{ mill} \cdot e^{0{,}19}$$

$$= \underline{\underline{2{,}42 \text{ mill}}}$$

---

2. Lineære og kvadratiske uttrykk og likninger

<u>Et lineært uttrykk</u> $ax+b$ (a og b er tall, $a \neq 0$)

<u>Eks</u> $4x - 3$ ($a = 4$, $b = -3$)

<u>En lineær likning</u> – en likning som kan gjøres om til: $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

<u>Eks</u> $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{2}{x+4} \quad \Big| \cdot (x+3)(x+4)$ $\left(\begin{matrix} x \neq -3 \\ x \neq -4 \end{matrix}\right)$

gir $x+4 = 2\cdot(x+3)$ dvs $x+4 = 2x+6$

trekker fra $2x+6$ på BS: $-x-2 = 0$ $\left(\begin{matrix} x \neq -3 \\ x \neq -4 \end{matrix}\right)$

($a = -1$, $b = -2$)

Et kvadratisk uttrykk : $\underbrace{a}_{}x^2+\underbrace{b}_{\text{tall}}x+\underbrace{c}_{}$ $(a \neq 0)$

En kvadratisk likning

– en likning som kan gjøres om til en ekvivalent likning : $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

EKS Likningen $3x+9 = (x-1)(x+3)$ er kvadratisk fordi :

– vi løser opp parantesene

$$3x+9 = x^2+3x-x-3$$

– trekker fra $3x+9$ på B.S.

$$0 = x^2-x-12 \quad \left(a=1,\ b=-1,\ c=-12\right)$$

EKS Likningen $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=3 \;\Big|\cdot x(x+1)$ er kvadratisk

fordi : – multipliserer med felles nevner på b.s.

$$x+1+2x = 3x(x+1)$$

$$3x+1 = 3x^2+3x$$

– trekker sammen : $3x^2-1=0$ $(a=3,\ b=0,\ c=-1)$

---

3. Likninger med parametre: abc-formelen

Hvis $a \neq 0$ har likningen $ax^2 + bx + c = 0$ løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>Eks</u> $3x^2 + 4x - 5 = 0$ $(a = 3,\ b = 4,\ c = -5)$

abc-formelen gir løsningene

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 60}}{6}$$

$76 = 4 \cdot 19$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{19}}{6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{19}}{6}$$

$$= \frac{\cancel{2}(-2 \pm \sqrt{19})}{\cancel{2} \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}}}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}}}$$