	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon av Kap 7	[E] 7.1 - 7.7	
2	Oppgaveregning		Oppgaveark 48: 7c, 8

Ekstra repetisjonsforelesning: mand 19/05 kl 09–12 A1-030

Gjennomgang av eksamen 05/2024.

Repetisjon av Kap. 7

(A) Optimering uten bibetingelser: max/min $f(x,y)$

Ordinære kand. for max/min:

Stasjonære pkt for f: $f'_x = f'_y = 0$

Unntakspkt:

- pkt der f'_x, f'_y ikke fins
- randpkt for D_f

Klassifikasjon som lokalt max/min/sadelpkt

Andrederivert-testen

(x^*, y^*) stasjonært $\rightsquigarrow$ $H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{yx}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

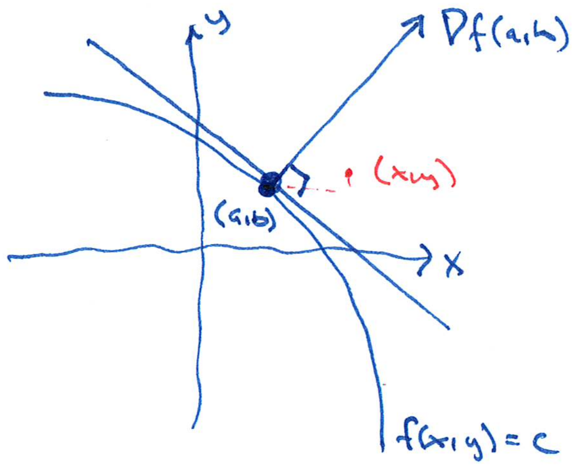
$\det = AC - B^2 > 0$:

* $A > 0$, $C > 0$ $\Rightarrow$ lokalt min
  $tr = A + C > 0$
* $A < 0$, $C < 0$ $\Rightarrow$ lokalt max
  $tr = A + C < 0$

$\det = AC - B^2 < 0$: $\Rightarrow$ sadelpkt

Avgjøre om lokale max/min er globale max/min

(B) Nivåkurver, gradient



Nivåkurve: $f(x,y) = c$

Stigningstall til tangenten: $-\dfrac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}$

Gradienten: $\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$

Retningen der f øker raskest i verdi

Lineær approksimasjon:

(x,y) nær (a,b): $$f(x,y) \simeq \underbrace{f(a,b) + (x-a)\cdot f'_x(a,b) + (y-b)\cdot f'_y(a,b)}_{\text{lineær approksimasjon}}$$

Opps. 7c, Oppgaveark 48

$f(x,y) = x^2y^2 + xy + x - y$

c) $f'_x = 2xy^2 + y + 1 = 0$ (1) $\rightarrow$ $2xy^2 = -y-1 \quad | :y$

$2xy = \dfrac{-y-1}{y} = -1 - \dfrac{1}{y}$

$f'_y = 2x^2y + x - 1 = 0$ (2)

$2x^2y = -x+1 \quad | :x$

$2xy = \dfrac{-x+1}{x} = -1 + 1/x$

$\rightarrow \cancel{-1} - 1/y = \cancel{-1} + 1/x \quad | +1$

$-1/y = 1/x \quad | \cdot xy \rightarrow \boxed{-x = y}$

Sjekk: $y=0$

(1) $1=0$ umulig

$x=0$

(2) $-1=0$ umulig

$\Rightarrow$ har ikke mistet noen løsn.

Setter inn i (2): $2x^2\cdot(-x)+x-1=0$

$y=-x$

$-2x^3+x-1=0 \quad |\cdot(-1)$

$2x^3-x+1=0$

Prøver $x=\pm 1$: $x=1$: $2=0$

$x=-1$: $-2+1+1=0 \Rightarrow x=-1$ er løsn.

$$
\begin{array}{l}
2x^3 \quad -x+1 : x+1 = 2x^2-2x+1 \\
\underline{2x^3+2x^2} \\
\quad -2x^2-x+1 \\
\quad \underline{-2x^2-2x} \\
\qquad x+1 \\
\qquad \underline{x+1} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$2x^3-x+1=0$

$(x+1)\cdot(2x^2-2x+1)=0$

$x+1=0$ eller $2x^2-2x+1=0$

$x=-1$, $y=1$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}$

ingen flere løsn.

Stasjonære pkt: $(x,y)=\underline{\underline{(-1,1)}}$

Andrederivert-testen:

$f'_x=2xy^2+y+1$ $\quad f''_{xx}=2y^2$ $\quad f''_{xy}=4xy+1$

$f'_y=2x^2y+x-1$ $\quad f''_{yx}=4xy+1$ $\quad f''_{yy}=2x^2$

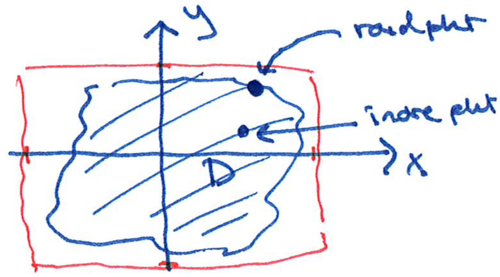
$H(f)(-1,1)=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 4-9<0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{(-1,1) \text{ er et sadelpkt}}}$

(C) Optimering med bibetingelser

max/min $f(x,y)$ når $\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{bibetingelser (likn/ulikheter)}}$

D = mengden av tillatte pkt
= alle (x,y) som oppfyller alle bibetingelser



Ekstremverdisetningen: EVS

Hvis f er kont. og D er kompakt = lukket og begrenset, så har f maks/min på D.

$\leq \; = \; \geq$ (randpkt er inkl. i D)

$a \leq x \leq b$
$c \leq y \leq d$
for alle (x,y) i D
(D inkl. i et rektangel)

Indre pkt: for D "$<$ $>$"

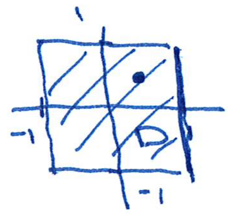
Kandidatpkt = stasjonære pkt for f

Randpkt: for D "$=$"

Kandidatpkt = **alle**

Tilfellet D = fyllt rektangel:

Eks: max $f = x+y$ når $\boxed{\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{array}}$



$f'_x = 1 = 0$
$f'_y = 1 = 0$
ingen indre pkt

Randpkt: $x = 1$ $\quad y = 1$
$x = -1$ $\quad y = -1$

Lagrange-problem : max/min $f(x,y)$ når $g(x,y)=a$

alltid lukket
ingen indre pkt

Hvordan finne kandidatpkt?

i) Løse $g(x,y)=a$ for x eller y og sette inn i f.

ii) Lagranges multiplikatormetode

$$\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda \cdot (g(x,y) - a)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{FOC}$$

$$g(x,y)=a \;\}\; C$$

1) Ordinære kandidatpkt: $(x,y;\lambda)$ som er løsn. av FOC+C

2) unntakspkt: (x,y) som er løsn. av

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= 0 \\ g'_y &= 0 \\ g(x,y) &= a \end{aligned}\right\}$$

tillatte pkt med degenerert bibetingelse

Resultat: Hvis (x^*,y^*) er max/min i et Lagrangeproblem så må enten i) det fins λ s.a $(x^*,y^*;\lambda)$ løser FOC+C
ii) (x^*,y^*) er tillatt pkt med degenerert bibet.

Tolkning av λ: marginal økning i maks/min-verdi per enhet endring i a (konstanten i bibetingelsen)

Opps 8 fra Oppgavesett 48:

C: $y^2 = 5x^2 - x^3$

max $f = x + y$ når $y^2 = 5x^2 - x^3$

a) $(x,y) \neq (0,0)$ slik at $-\dfrac{g'_x}{g'_y} = -1 \quad | \cdot (-1)$

C: $\underbrace{y^2 - 5x^2 + x^3}_{g(x,y)} = \underset{a}{0}$

$\dfrac{g'_x}{g'_y} = 1$

$g'_x = g'_y$

Skrives likn. for C på formen $g(x,y) = a$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= -10x + 3x^2 \\ g'_y &= 2y \end{aligned}\right\}$$

$-10x + 3x^2 = 2y \quad |:2$

$y = -5x + \frac{3}{2}x^2$

$\left(-5x + \frac{3}{2}x^2\right)^2 = 5x^2 - x^3$

$\left(-5x + \frac{3}{2}x^2\right) = \frac{x}{2}(-10 + 3x)$

$\dfrac{x^2}{4}(-10 + 3x)^2 = x^2(5 - x)$

$x = 0$ eller $\frac{1}{4}(9x^2 - 60x + 100) = 5 - x \quad | \cdot 4$

$9x^2 - 60x + 100 = 20 - 4x$

$9x^2 - 56x + 80 = 0$

$$x = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 9 \cdot 80}}{2 \cdot 9} = 4, \ 20/9$$

$x = 4$: $y = -5 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 4^2 = -20 + 24 = 4$

$x = \frac{20}{9}$: $y = -5 \cdot \frac{20}{9} + \frac{3}{2}\left(\frac{20}{9}\right)^2 = \dfrac{-100 \cdot 9}{9 \cdot 9} + \dfrac{3 \cdot \cancel{400}^{200}}{\cancel{2} \cdot 81} = \dfrac{-900 + 600}{81} = \dfrac{-300}{81} = -\dfrac{100}{27}$

Vi finner to pkt: $(x,y) = \underline{(4,4)}$, $\underline{(20/9, -100/27)}$

b) $h = x + y - \lambda(y^2 - 5x^2 + x^3)$

Skriver $y^2 = 5x^2 - x^3$ som $\underbrace{y^2 - 5x^2 + x^3}_{g(x,y)} = \underbrace{0}_{a}$

$$\boxed{\begin{aligned} h'_x &= 1 - \lambda \cdot (-10x + 3x^2) = 0 \\ h'_y &= 1 - \lambda(2y) = 0 \\ y^2 &= 5x^2 - x^3 \end{aligned}}$$

① $\lambda = \dfrac{1}{-10x + 3x^2}$

② $\lambda = \dfrac{1}{2y}$

$\underline{\lambda = \lambda:}$

$$\frac{1}{-10x + 3x^2} = \frac{1}{2y} \quad \Big| \cdot 2y(-10x + 3x^2)$$

$$2y = -10x + 3x^2$$

<u>Vi får likn:</u>

$2y = -10x + 3x^2$ fra ① og ②

$y^2 = 5x^2 - x^3$ fra ③

Samme likn som i (a), dvs $(x,y) = (4,4), (20/9, -100/27)$

<u>Finner λ:</u> $\lambda = \dfrac{1}{2y}$

$y = 4$: $\lambda = \dfrac{1}{8}$

$y = -100/27$: $\lambda = \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{27}{100}\right)$

$= -27/200$

<u>Konkl:</u> $(x, y; \lambda) = \underline{(4, 4; 1/8)}$, $\underline{(20/9, -100/27; -27/200)}$

<u>Spørsmål om vi har mistet løsn:</u>

$-10x + 3x^2 = 0$

$-x(10 - 3x) = 0$

$x = 0$ eller $x = 10/3$

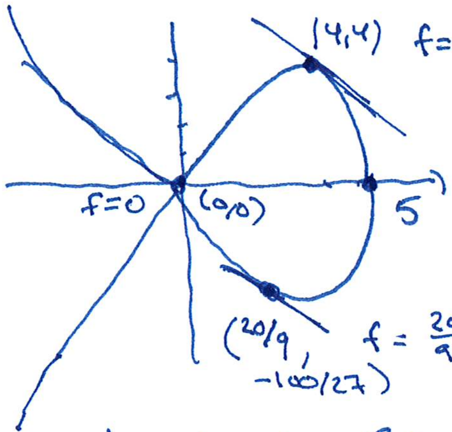
$y = 0$: passer ikke i ②, $1 = 0$

$x = 10/3$: passer ikke i ①, $1 = 0$

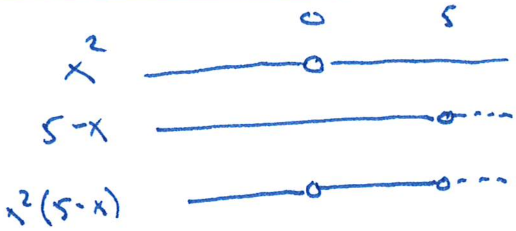
$y = 0$: passer ikke i ②, $1 = 0$

nei, ikke mistet løsn.

$y^2 = 5x^2 - x^3 = x^2(5-x)$



$f = \frac{20}{9} - \frac{100}{27} = \frac{60}{27} - \frac{100}{27} = -40/27$



Ca tegning av C:

ingen pkt når $x > 5$: $y^2 = $ neg.

ett pkt når $x = 0, 5$: $y^2 = 0$

to pkt (symm) når

$x < 0,\ 0 < x < 5$: $y^2 = $ pos.

Degenerert bibetingelse:

$g'_x = g'_y = 0$: $10x - 3x^2 = 0$, $2y = 0$

$x = 0, 10/3$ $\quad y = 0$

Eneste pkt som er tillatt: $(x,y) = (0,0)$

Konklusjon:

Problemet har ikke noe maksimum, siden beste kandidat pkt $f(4,4) = 8$ ikke er maks;

$f(-11,44) = 33 > 8$

$(-11,44)$ er tillatt pkt.

Ser: $x \to -\infty$ betyr

$x^2(5-x) \to \infty$

$y^2 = x^2(5-x) \to \infty$

Fra figuren ser det ut som $x+y$ vokser til verdier over $f=8$ (krysser gjennom tangenten i (4,4)) når $x \to -\infty$, $y \to \infty$

Tester dette:

$x = -11$: $y^2 = (-11)^2 \cdot (5-(-11))$

$= 121 \cdot 16$

$y = \pm\sqrt{121 \cdot 16}$

$= \pm 11 \cdot 4 = \pm 44$

$\Rightarrow (-11,44)$ er et tillatt pkt, og

$f(-11,44) =$

$-11 + 44 = 33 > 8$

Kandidatpkt:

$f(4,4) = 8$

$f(20/9, -100/27) = -40/27$

$f(0,0) = 0$