	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Nødvendige betingelser for max/min	[E] 7.7	[E] 7.7.3 - 7.7.6
2	Degenerert bibetingelse	[E] 7.7	[E] 8.17
3	Tolkning av Lagrange-mulitplikatoren	[E] 7.7	[O] 10.20

Rep. foreles.: 19. mai ? Sjekker og legger ut beskjed.

1 Nødvendige betingelser i Lagrange-problem

Lagrange-problem: $\boxed{\text{max/min } f(x,y) \quad \text{når} \quad g(x,y)=a}$

Metode:

Finner kandidater for max/min

$$\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda\cdot(g(x,y)-a)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= f'_x - \lambda\cdot g'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= f'_y - \lambda\cdot g'_y = 0 \end{aligned}\right\} \text{FOC}$$

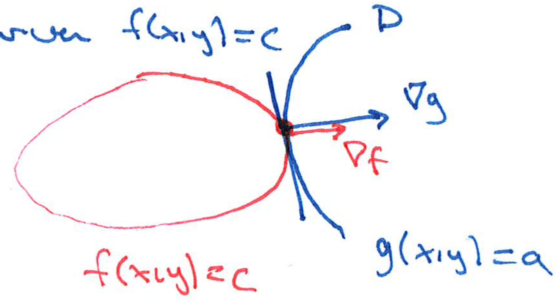
$$\left. g(x,y) = a \right\} \text{C}$$

Lagrange-betingelsene

λ: Lagrange-mult.

Idé: Pkt som skal være max/min er blant løsn. av Lagrange-betingelsene $(x,y;\lambda)$

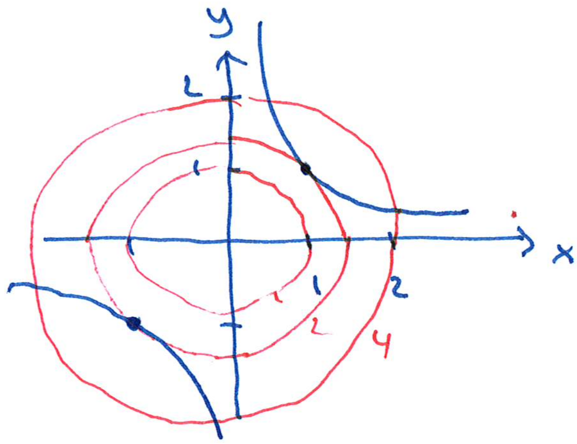
Husk: Pktene $(x,y;\lambda)$ som vi får når vi løser FOC+C er pkter der $g(x,y)=a$ og der denne kurven møter nivåkurven $f(x,y)=c$ i en tangent.



Eks: min $f(x,y) = x^2+y^2$ når $xy=1$

$L = x^2+y^2 - \lambda(xy-1)$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= 2x - \lambda \cdot y = 0 \\ L'_y &= 2y - \lambda \cdot x = 0 \\ & \quad xy = 1 \end{aligned}}$$



(1) $2x = \lambda y \Rightarrow x = \frac{\lambda y}{2}$

(2) $2y - \lambda\left(\frac{\lambda y}{2}\right) = 0 \quad | \cdot 2$

$4y - \lambda^2 y = 0$

$y(4-\lambda^2) = y(2-\lambda)(2+\lambda) = 0$

D: $xy = 1$

$y = 1/x$

$f(x,y) = 2$: $x^2+y^2 = 2$

$f(x,y) = c$: sirkel m/ radius $\sqrt{c}$

$y=0$	eller $\lambda = 2$	eller $\lambda = -2$
$x = 0$	$x = y$	$x = -y$
(3) $xy = 0 \cdot 0 \neq 1$	(3) $xy = y^2 = 1$	(3) $-y \cdot y = 1$
	$y = \pm 1$	$y^2 = -1$
ingen pkt	$(1,1;2)$ $f=2$	ingen pkt
	$(-1,-1;2)$ $f=2$	

$f_{min} = 2$ i $(x,y) = (1,1), (-1,-1)$ med $\lambda = 2$

Nødvendig betingelse i Lagrange-problem

Teorem:

Hvis (x^*, y^*) er max/min i et Lagrange-problem, så har vi enten:

i) Det fins λ slik at $(x^*, y^*; \lambda)$ oppfyller FOC+C "vanlig"

ii) Bibetingelsen er degenerert i (x^*, y^*) "unntak"

② Degenerert bibetingelse

Defn: Bibetingelsen $g(x,y)=a$ er degenerert i pkt $(x,y)=(a,b)$ hvis $g'_x(a,b) = g'_y(a,b) = 0$.

Altså: For å sjekke om et Lagrange-problem har unntakspkt: Løs likn.

$$g'_x = 0$$
$$g'_y = 0$$
$$g(x,y) = a$$

Et pkt på kurven $g(x,y)=a$ har degenerert bibetingelse = kurven har ikke ordentlig tangent i pkt.

Forklaring:

$$g'_x = g'_y = 0 \Rightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alt: $g(x,y)=a$

stign.tallet til tangenten: $-\dfrac{g'_x}{g'_y}$

$g'_x, g'_y \neq 0$: et stign.tall

$g'_x = 0,\ g'_y \neq 0$: stign.tall $= 0$

$g'_x \neq 0,\ g'_y = 0$: —||— $= \pm\infty$

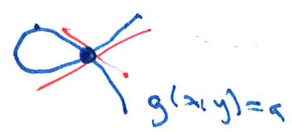
$g'_x = g'_y = 0$: ikke ordentlig tangent

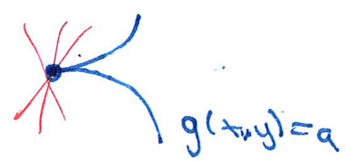
Eks: $\underbrace{xy}_{g(x,y)} = 1$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= y = 0 \\ g'_y &= x = 0 \end{aligned}\right\} \quad (x,y) = (0,0)$$

$$0 \cdot 0 = 0 \neq 1$$

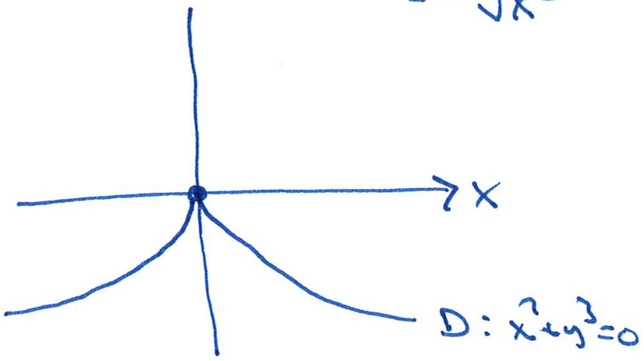
Konkl: For $xy=1$ er det ingen pkt med degenerert bibetingelse.





Eks: max $f(x,y) = y$ når $x^2 + y^3 = 0$

$y^3 = -x^2 \quad y = \sqrt[3]{-x^2} = -\sqrt[3]{x^2}$



$\mathcal{L} = y - \lambda(x^2 + y^3)$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= -\lambda \cdot 2x = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 1 - \lambda \cdot 3y^2 = 0 \\ & x^2 + y^3 = 0 \end{aligned}}$$

(1) $-\lambda \cdot 2x = 0 \quad : (-2)$

$\lambda \cdot x = 0$

$\underline{\lambda = 0}$ eller $\underline{x = 0}$

(2) $1 - 0 \cdot 3y^2 = 0$, $1 = 0$ — ingen pkt.

(3) $0 + y^3 = 0$, $y^3 = 0$, $\underline{y = 0}$

(2) $1 - \lambda \cdot 0 = 0$, $1 = 0$ — ingen pkt

Mulige max-pkt: $(x,y) = (0,0)$

$f_{max} = \underline{\underline{0}}$ i $(0,0)$

Sjekk for pkt med degenerert bibetingelse:

$g(x,y) = x^2 + y^3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= 2x = 0 \\ g'_y &= 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{(x,y) = (0,0)}$$

$x^2 + y^3 = 0 + 0 = 0$ ok

Altså: $(0,0)$ er et pkt på D med degenerert bibetingelse.

(3) Tolkning av Lagrange-multiplikatoren λ

Eks: min $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ når $2x + 3y = 6$

$$\mathcal{L} = 4x^2 + 9y^2 - \lambda(2x + 3y - 6)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 8x - \lambda \cdot 2 = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 18y - \lambda \cdot 3 = 0 \\ & 2x + 3y = 6 \end{aligned}}$$

(1) $2\lambda = 8x \quad \lambda = 4x$

(2) $3\lambda = 18y \quad \lambda = 6y$

"$\lambda = \lambda$"

$$\frac{4x}{4} = \frac{6y}{4}$$

$$x = \frac{6y}{4} = \frac{3y}{2}$$

(3) $\cancel{2}\left(\frac{3y}{\cancel{2}}\right) + 3y = 6$

$6y = 6$

$y = 1 \quad x = 3/2 \quad \lambda = 4 \cdot 3/2 = 6$

Ordinære kandidatpkt:

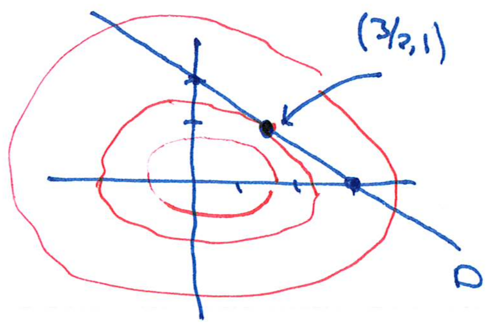
$(x,y;\lambda) = (3/2, 1; 6)$

$$f = 4(3/2)^2 + 9(1)^2 = 9 + 9 = 18$$

Unntakspkt:

ingen tillatte pkt med degenererte bibetingelse siden $2x + 3y = 6$ er en rett linje

D: $2x + 3y = 6$ er ikke kompakt.



D: $2x + 3y = 6$ går gjennom $(3,0)$, $(0,2)$

$f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 = 18$

ellipse, sentr. $(0,0)$

$f(x,y) = 18$ er minste ellipse som treffer D

$\Updownarrow$

$f_{min} = 18$ i $(3/2, 1)$ med $\lambda = 6$

Tolkning av λ:

Hvis vi øker a med 1, vil min. verdien øke med 6.

$a = 7 \rightsquigarrow$ min. verdi $\simeq 18 + 1 \cdot \lambda = 24$

Mer presist: max/min $f(x,y)$ når $g(x,y)=a$

Anta at vi finner max/min-verdi som en funksjon av a: $f^*(a)$

Da har vi: $$\frac{df^*(a)}{da} = \lambda$$

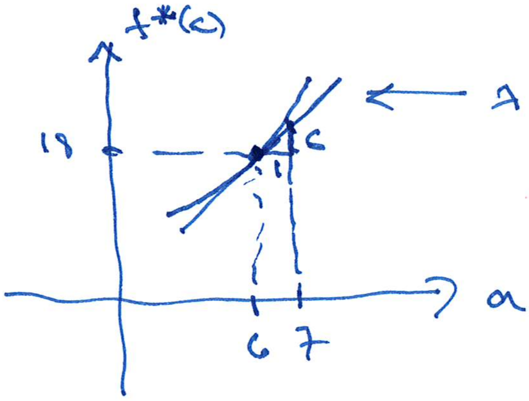
I eks:

$f^*(6) = 18$

$f^*(7) =$ ny min. verdi når vi bytter ut $a=6$ med $a=7$

Altså: $$f^*(7) \simeq f^*(6) + \Delta a \cdot \frac{df^*(a)}{da}$$

$$= 18 + 1 \cdot 6 = \underline{\underline{24}}$$



$\lambda =$ stign.tall til $f^*(a)$ som en fn. av a

I eks. ville $f^*(a)$ være minimumsverdien til

$$\min f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 \quad \text{når} \quad 2x + 3y = a$$

(et Lagrange-prob. med parameter a). Min. verdien $f^*(a)$ er en funksjon av a, og kalles optimalverdi fn.