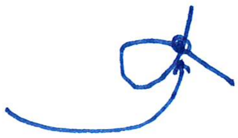
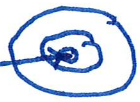
	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Optimering med bibetingelser	[E] 7.7	
2	Indre punkt og randpunkt	[E] 7.7	[E] 7.7.2
3	Ekstremverdisetningen	[E] 7.7	[E] 7.7.1

Oppgaveark 42–43

7. Prøv å identifisere sadelpkt



lokal max/min



Bruk farge/skala til å skille mellom lokalt max/min

$(x-1)^2 + 4y^2 - 1 \geq -1$

$\| $

$x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 1$

$\|$

9. d) $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

$f'_x = 2x - 2 = 0 \qquad x = 1$

$f'_y = 8y = 0 \qquad y = 0$

$\Big\} \; \underline{(1,0)}$

$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$\underline{H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$

$\det = AC - B^2 = 16 > 0$

$A = 2 > 0$

$(1,0)$ lokalt min

Globale max: Ingen

Globalt min: $f(1,0) = -1$

$f_{min} = \underline{\underline{-1}}$ i $(1,0)$

Eks: i) $\underline{f(x,y) = x^2 + 5xy + 3y^2}$

$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x + 5y = 0 \\ f'_y &= 5x + 6y = 0 \end{aligned}\right\} (x,y) = \underline{(0,0)}$ $\quad H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \det = -13$ sadelpkt

ii) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

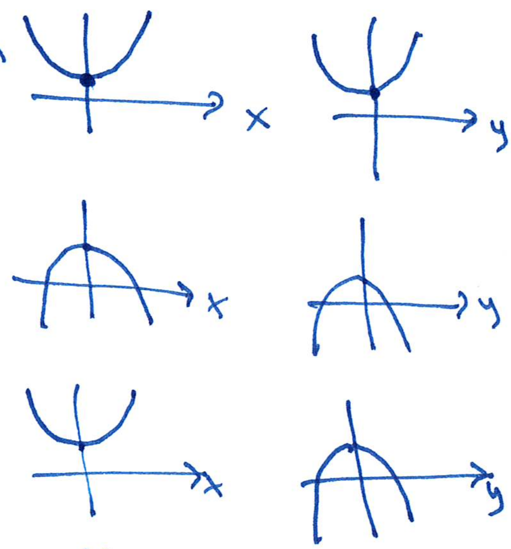
$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x + 2y = 0 \\ f'_y &= 2x + 6y = 0 \end{aligned}\right\} \quad (x,y) = \underline{(0,0)} \qquad H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\det = 8 > 0 \\ &2 > 0 \end{aligned}$$

pga at f er poly av grad 2 $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &(0,0) \text{ lokalt min.} \\ &\Downarrow \\ &(0,0) \text{ globalt min.} \end{aligned}}$$

Om andrederivert-testen:

$$AC - B^2 > 0 \Rightarrow AC > 0 \Rightarrow \begin{cases} A > 0,\ C > 0 \\ \text{eller} \\ A < 0,\ C < 0 \end{cases}$$



A, C motsatte fortegn

A > 0 C < 0

$AC - B^2 > 0$

$\Downarrow$

grafen til f ~~har~~ har (A > 0) konveks form i det store, dvs. uansett hvilken retning vi går i

eller

grafen til f har (A < 0) konkav form i det store, dvs. uansett hvilken retn. vi går i

① Optimering med bibetingelser

Eks: $\min f(x,y) = \underbrace{x^2-2x+4y^2-16y}_{\text{objektivfn.}}$ når $\underbrace{\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 10 \end{cases}}_{\text{bibetingelser}}$

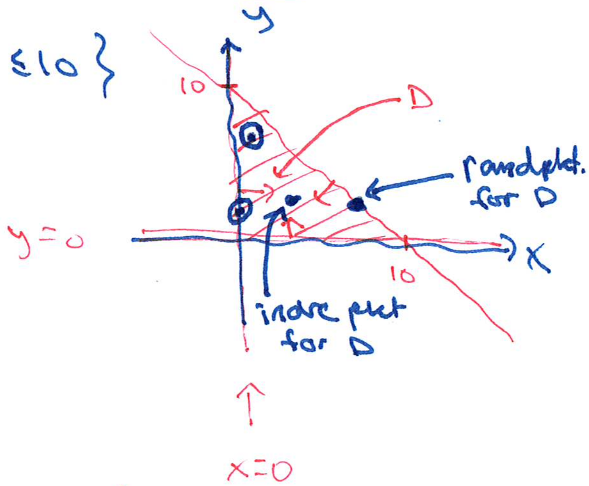
Defn: $\boxed{\text{Det tillatte området } D \text{ består av alle pkt. } (x,y) \text{ som oppfyller alle bibetingelser.}}$

Eks: $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 10\}$

er det tillatte området.

$x+y=10 \qquad y = 10-x$

$x+y<10 \qquad y<10-x$



Problem: Hva er den minste verdien av $f(x,y) = x^2-2x+4y^2-16y$ når (x,y) er i D?

② Randpkt og indre pkt

Defn:

Et randpkt for D er et pkt "på randen" av D, et indre pkt i D er et pkt i D som ikke er et randpkt.

Et randpkt for D er et punkt slik at enhver sirkelskive med sentrum i det gitte pkt inneholder både pkt i D og pkt utenfor D.

Kandidatpkt. for f

i) Stasjonære pkt i det indre av D.

ii) Pkt der de deriverte til f ikke fins i det indre av D

iii) Randpkt for D

$=$ gir randpkt $\quad$ $<$ eller $>$ gir indre pkt.

Finner kandidatpkt i cls: $\quad f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 - 16y$ når $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 10$

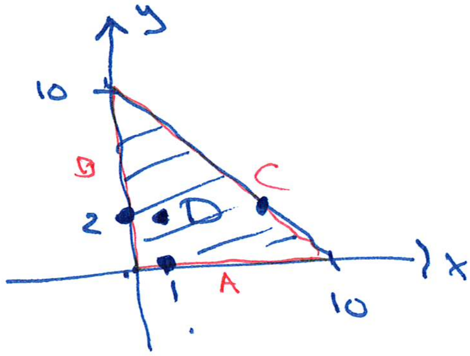
i) **Stasjonære pkt for f:**

$f'_x = 2x - 2 = 0 \quad x = 1$

$f'_y = 8y - 16 = 0 \quad y = 2$

$(x,y) = (1,2)$

$f(1,2) = -17$



ii) **Pkt der f'_x eller f'_y ikke fins:** ingen

iii) **Randpkt for D:** Uendelig mange pkt

A: $y = 0,\ 0 \leq x \leq 10$ $\quad f(x,0) = x^2 - 2x$

$(x,0),\ 0 \leq x \leq 10$ $\quad (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \quad x = 1$

$f(1,0) = 1 - 2 = -1$ ← minste verdi på A.

B: $x = 0,\ 0 \leq y \leq 10$ $\quad f(0,y) = 4y^2 - 16y$

$(0,y) \quad 0 \leq y \leq 10$ $\quad (4y^2 - 16y)' = 8y - 16 = 0 \quad y = 2$

$f(0,2) = -16$ ← minste verdi på B

C: $x + y = 10,\ y = 10 - x,\ 0 \leq x \leq 10$

$(x, 10-x) \quad 0 \leq x \leq 10$

$$f(x,10-x) = x^2 - 2x + 4(10-x)^2 - 16(10-x)$$
$$= x^2 - 2x + 4(100 - 20x + x^2) - 160 + 16x$$
$$= x^2 + 4x^2 - 2x - 80x + 16x + 400 - 160$$
$$= 5x^2 - 66x + 240 = 5x^2 - 66x + 240$$

$(5x^2 - 66x + 240)' = 10x - 66 = 0 \quad x = 6.6$

$x = 6.6$

$f(6.6, 3.4) = 30.36 - 8.16$
$= 22.2$

minste verdi på C

③ Ekstremverdisetningen

Hvis f er en kontinuerlig funksjon på en kompakt delmengde D, så har f et max og min. på D.

Defn En delmengde D av xy-planet er kompakt hvis den er lukket og begrenset.

D er lukket hvis alle randpkt for D er med i D.

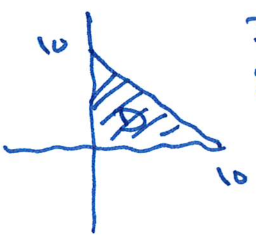
D er begrenset hvis det fins konstanter a, b, c, d slik at

$$a \leq x \leq b$$
$$c \leq y \leq d$$

for alle pkt (x,y) i D.

D er lukket hvis alle bibetingelser er lukk. $(=)$ eller lukkede ulikheter ($\leq$ eller $\geq$)

Eks: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 10$



D er lukket: $\geq, \geq, \leq$

D er begrenset siden $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$

$\Downarrow$

D er kompakt

(EVS) $\Rightarrow$ min $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 - 16y$ når $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 10$

har et min

(dvs kandidatpkt med minst verdi må være min)

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

Minste verdi blant kandidatpkt: $f(1,2) = -17$

Ekstremverdisetn: Siden D er lukket og begrenset (kompakt) har $f = x^2 - 2x + 4y^2 - 16y$ et min på D

$\Downarrow$

$f_{min} = \underline{\underline{-17}}$ i $(x,y) = \underline{(1,2)}$

(min. verdi) (min. pkt)