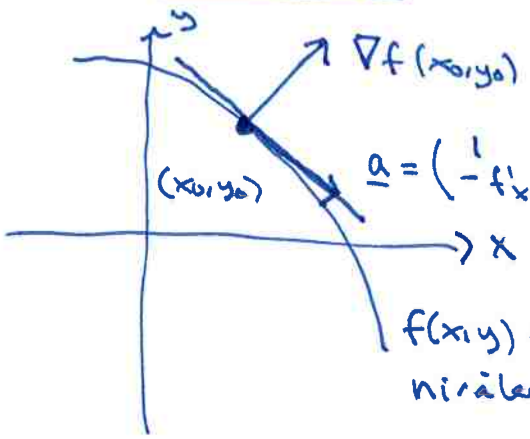
	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgaveregning		
2	Lineær approksimasjon og gradienten	[E] 7.6	[E] 7.6.1 - 7.6.3
3	Globale maksimums- og minimumspunkter	[E] 7.4	[E] 7.4.3 - 7.4.4

1 Repetisjon



$\underline{a} = \left(1, -f'_x(x_0,y_0)/f'_y(x_0,y_0)\right)$

Tangent til nivåkurven $f(x,y)=c$ i (x_0,y_0):

$$\boxed{y - y_0 = k\cdot(x-x_0)}$$

der $k = y'(x_0,y_0) = -\dfrac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$

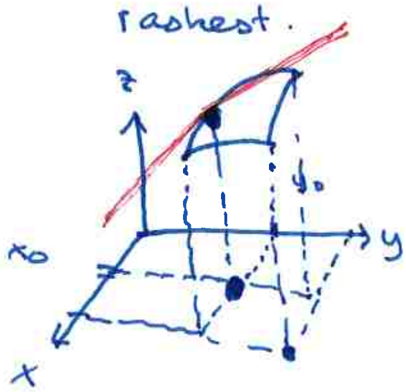
Gradienten i (x_0,y_0):

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f \cdot \underline{a} = 1\cdot f'_x + (-f'_x/\cancel{f'_y})\cdot \cancel{f'_y} = 0$$

Egenskaper: i) ∇f står normalt på tangenten i (x_0,y_0)

ii) Retningen til ∇f = retningen der f vokser raskest.



2 Lineær approksimasjon

Den lineære approksimasjonen til $f(x,y)$ omkring (x_0,y_0):

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$\boxed{f(x,y) - f(x_0,y_0) \simeq \nabla f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}}$$

Eks: $f(x,y) = \sqrt{x+3y} \qquad (x_0,y_0) = (1,1)$

$f(1,1) = \sqrt{4} = \underline{2}$

$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x+3y}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3y}} \qquad f'_x(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = 1/4$

$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x+3y}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{x+3y}} \qquad f'_y(1,1) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = 3/4$

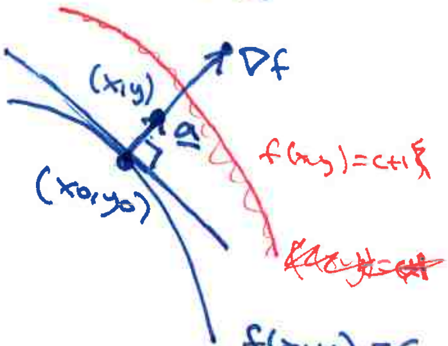
Lineær approksimasjon omkring (1,1):

$f(x,y) \simeq f(1,1) + f'_x(1,1)\cdot(x-1) + f'_y(1,1)\cdot(y-1)$ når (x,y) er nær $(1,1)$

$z = 2 + \frac{1}{4}\cdot(x-1) + \frac{3}{4}(y-1)$

$f(1.2,1.1) = 2 + \frac{1}{4}\cdot 0.2 + \frac{3}{4}\cdot 0.1 = 2 + \frac{2}{40} + \frac{3}{40} = 2 + \frac{5}{40} = 2 + \frac{1}{8}$

$\sqrt[4]{4.5}$ $\qquad = \underline{2.125}$



$a = k\cdot\nabla f$ (k liten og positiv)

$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + \nabla f \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0)}_{\text{endring i } f} = \nabla f \cdot \underline{a} = \nabla f \cdot k\nabla f$

$= \underbrace{k}_{>0}\,(\underbrace{\nabla f\cdot\nabla f}_{>0}) > 0$

Tangentplanet til f i (x_0,y_0): $z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

Eks: $z = 2 + 1/4\,(x-1) + 3/4\,(y-1) = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}$

$\underline{z = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y}$ tangentplanet til $f(x,y) = \sqrt{x+3y}$ i $(1,1)$.

Opps 4 $f(x,y) = \underbrace{x^2-2x}_{+1} + \underline{4y^2} = \underset{+1}{c}$ ellipse for $c > -1$

$(x-1)^2 + 4y^2 = c+1 \quad | : (c+1)$

$\frac{(x-1)^2}{c+1} + \frac{4y^2}{c+1} = 1$

$\frac{(x-1)^2}{c+1} + \frac{y^2}{(c+1)/4} = 1$

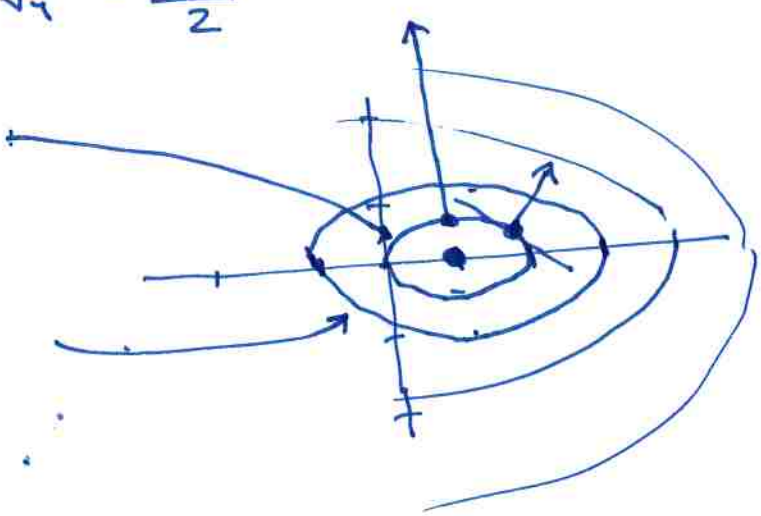
Sentr: $(1,0)$

$a = \sqrt{c+1}$

$b = \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{c+1}}{2}$

$c = -1$: pkt $(1,0)$

$c < -1$: ingen pkt.



$c > -1$:

større og større ellipse jo større c er

$\Rightarrow$ ingen max

$c = -1$: $f(1,0) = -1$ er min

$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 8y \end{pmatrix}\Big|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

Oppgave 2

b) $f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2 = xy(x + y^2 + y)$

$f'_x = \underline{2xy + y^3 + y^2} = y(2x + y^2 + y) = 0$ $\underline{y=0}$ eller $2x + y^2 + y = 0$

$f'_y = \underline{x^2 + 3xy^2 + 2xy} = x(x + 3y^2 + 2y) = 0$ $\underline{x=0}$ " og $x + 3y^2 + 2y = 0$

$\Rightarrow$ a) $y=0, x=0$: $(x,y) = \underline{(0,0)}$

b) $y=0,\ x+3y^2+2y=0$ $y=0,\ x=0 \Rightarrow \underline{(0,0)}$

c) $2x+y^2+y=0,\ x=0$ $x=0,\ y^2+y=0$ $y(y+1)=0$ $\underline{y=0}$ el. $y=-1$

$\Rightarrow \underline{(0,0)},\ \underline{(0,-1)}$

d) $2x+y^2+y=0,\ x+3y^2+2y=0$

$\Downarrow$

$x = \underline{-3y^2-2y}$

$2(-3y^2-2y) + y^2 + y = 0$

$-6y^2 - 4y + y^2 + y = 0$

$-5y^2 - 3y = 0$

$-y(5y+3) = 0$

$y=0$, $y = -3/5$

$\underline{x=0}$ $x = -3(9/25) - 2(-3/5)\cdot\frac{5}{5}$

$= \frac{-27 + 6\cdot 5}{25} = \underline{3/25}$

Konkl:

$(x,y) = \underline{(0,0)},\ \underline{(0,-1)},\ \underline{(3/25, -3/5)}$

$H(f) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+3y^2+2y \\ * & 6xy+2x \end{pmatrix}$

$H(f)(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det H = -2\cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$

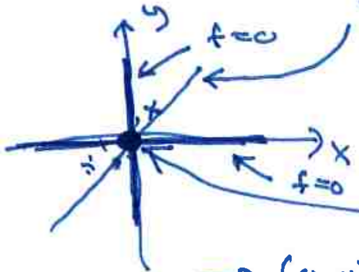
Sadelpkt.

$(3/25, -3/5)$: lokalt maks.

$(0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det H = 0$

Bruk defn.



$\underline{y=x}$:

$f = x^3 + x^4 + x^3$

$= x^3(2+x)$

$\underline{x>0}$: $f>0$ $\underline{x<0}$: $f<0$

$f(0,0) = 0$

$\Rightarrow (0,0)$ sadelpkt

③ Globale maks og min

$\boxed{\text{max/min } f(x,y)}$

optimering uten bibetingelser

Metode:

(a) Finn kandidater for max/min

(i) Stasjonære punkt ← $\boxed{f'_x = 0,\ f'_y = 0}$

(ii) punkt der f'_x eller f'_y ikke fins

(iii) randpunkt for D_f

(b) Klassifisere kandidatpkt som lokalt maks / lokalt min / sadelpkt

Andre derivert-testen:

Hvis (a,b) stasjonært pkt, så ser vi på $H(f)(a,b) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

i) $\det H = AC - B^2 > 0$, $A > 0$: (a,b) lokalt min

ii) — " —, $A < 0$: (a,b) lokalt max

iii) $\det H = AC - B^2 < 0$: (a,b) sadelpkt

Kan ikke bruke andrederivert-testen:

- stasjonære pkt med $\det H = AC - B^2 = 0$
- kandidatpkt av type ii), iii).

Alt.: – defn.

– tilfellet med globalt maks/min.

(c) Lokale min: kan være globale min

Lokale max: — " — max

Avgjør!

Sadelpkt / pkt som ikke er kandidatpkt: kan ikke være max/min

c) $f = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Stasj. pkt: $(0,0)$

$f(0,0) = \sqrt{36} = 6$

$f(x,y) \leq \sqrt{36} = 6$

$\Rightarrow (0,0)$ globalt maks.

$\Rightarrow$ " lokalt maks

Opps. 9

e) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

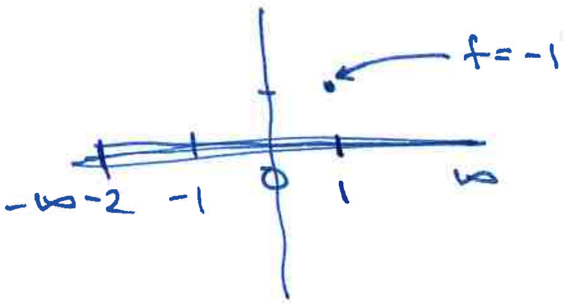
Stasj. pkt: $\cancel{(0,0)}$, $(1,1)$

Sadelpkt. lokalt min

globale max: nei

globale min: nei

$f(1,1) = -1$



$y=0$ $f = x^3$

$f(-2,0) = -8 < -1$

Rakk ikke flere oppgaver i dag, prøver å gjøre Opg.7 + noen flere deloppg. fra Opg 9 på torsdag.