| | Emne | Lærebok | Oppgaver |
|---|---|---|---|
| 1 | Partiell-derivasjon | [E] 7.3 | [E] 7.3.1 - 7.3.2 |
| 2 | Andrederiverte og Hesse-matrisen | [E] 7.3 | [E] 7.3.3 - 7.3.5 |

## 1 Partiell derivasjon

$f(x,y)$ fn. i to variabler

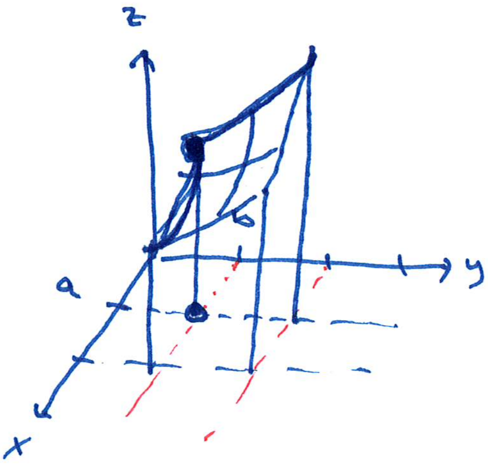
$z = f(x,y)$

$(x,y) = (a,b)$ punkt

**Def:**

$$f'_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$f'_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$




$f'_x(a,b)$ : stigningstallet til tangenten når vi holder y konst, endrer x i pkt (a,b)

$f'_y(a,b)$ : — " — holder x konst., endrer y

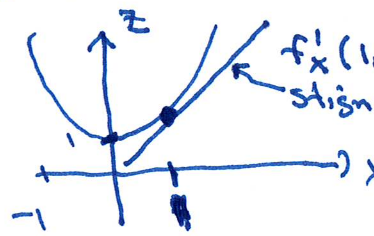
**Eks:**

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$

$(x,y) = (1,-1)$

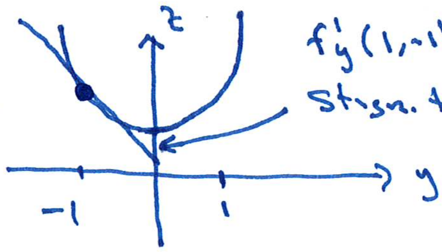
$f'_x$: $z = f(x,-1) = x^2 + 1$




$f'_x(1,-1) = 2 \cdot 1 = 2$

stign. tallet

$f'_y$: $z = f(1,y) = 1 + y^2$




$f'_y(1,-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

stign. tallet

## Beregning av de partiellderiverte $f'_x$, $f'_y$

– fra defn: $f(x,y) = x^2+y^2$

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+\cancel{y^2}-(x^2+\cancel{y^2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = \underline{2x}$$

– ved å bruke regnereglene:

$$f(x,y)=x^2+y^2 \quad \begin{cases} f'_x = 2x+0 = \underline{2x} \\ f'_y = 0+2y = \underline{2y} \end{cases}$$

tenker vi at y er konst. og bruker vanlige der. regler mht. x

– " –

x er konst.

$f'_x(1,-1) = 2\cdot 1 = 2$

$f'_y(1,-1) = 2\cdot(-1) = -2$

Eks: $f(x,y) = x^3+xy-y^2$

$$f'_x = 3x^2 + (xy)'_x - 0 = 3x^2 + y(x)'_x - 0 = \underline{3x^2+y}$$

$$f'_y = 0 + x\cdot 1 - 2y = \underline{x-2y}$$

Defn. Et stasjonært punkt for en funksjon $f(x,y)$ i to variabler er et pkt hvor $f'_x=0,\ f'_y=0$.

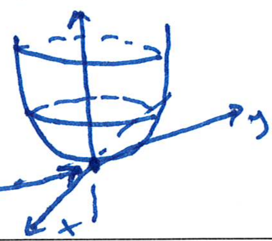
førsteordens-betingelsene

Eks:
$f(x,y) = x^2+y^2$

$f'_x = \boxed{2x=0}$ $\quad x=0$

$f'_y = \boxed{2y=0}$ $\quad y=0$

} stasjonære pkt: $(x,y)=(0,0)$



**Eks:**

$$f(x,y) = x^3 + xy - y^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + y = 0 \\ f'_y &= x - 2y = 0 \end{aligned}} \Rightarrow x = 2y$$

FOC

$$3(2y)^2 + y = 0$$

$$12y^2 + y = 0$$

$$y(12y+1) = 0$$

$y = 0$ eller $12y + 1 = 0$

$x = 0$

$$\frac{12y}{12} = \frac{-1}{12}$$

$$y = -\tfrac{1}{12}$$

$$x = -\tfrac{2}{12} = -\tfrac{1}{6}$$

**Stasjonære pkt:**

$$(x,y) = (0,0),\ \left(-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{12}\right)$$

$f = 0$

kandidat min?

$$f = \left(-\tfrac{1}{6}\right)^3 + \left(-\tfrac{1}{6}\right)\left(-\tfrac{1}{12}\right) - \left(-\tfrac{1}{12}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{216} + \frac{1}{72} - \frac{1}{144} = -\frac{1 \cdot 2}{216 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 6}{72 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3}{144 \cdot 3}$$

$$= \frac{-2+6-3}{432} = \frac{1}{432} > 0$$

kandidat max?

Stasjonære pkt = kandidater for max/min.

**Defn.**

Et pkt $(x,y) = (a,b)$ er et maksimumspkt (eller globalt maks. pkt) for $f$ hvis $f(a,b) \geq f(x,y)$ for alle pkt $(x,y)$, og et min. pkt (globalt minpkt) for $f$ hvis $f(a,b) \leq f(x,y)$ for alle $(x,y)$.


Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

## ② Andre deriverte og Hessematrisen

**Eks:** $f(x,y) = x^3 + xy - y^2$

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2 + y \\ f'_y(x,y) &= x - 2y \end{aligned}\right\} \text{første ordens partiell-deriverte}$$

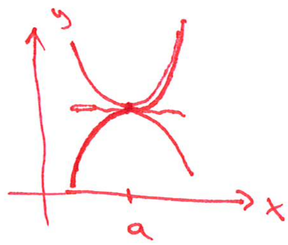
$$\left.\begin{aligned} f''_{xx} &= (3x^2+y)'_x = 6x + 0 = \underline{6x} \\ f''_{xy} &= (3x^2+y)'_y = 0 + 1 = \underline{1} \\ f''_{yx} &= (x-2y)'_x = 1 - 0 = \underline{1} \\ f''_{yy} &= (x-2y)'_y = 0 - 2 = \underline{-2} \end{aligned}\right\} \text{andre ordens partiell-deriverte}$$

Minner om én variabel:

$f(x)$

$f'(x) = 0$

$\to \ldots \to \underline{x = a}$




$f''(a) > 0$ (konveks)

$f''(a) < 0$ (konkav)

**Defn. av Hesse-matrisen:**

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

**Eks:** $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ $f = x^3 + xy - y^2$, $f'_x = 3x^2 + y$, $f'_y = x - 2y$

**Fakta:** For (nesten) alle funksjon $f(x,y)$, så er $f''_{xy} = f''_{yx} \iff H(f)$ er symmetrisk. $\leftarrow$ for alle polynomfn, rasjonale fn., etc som vi bruker holder dette.