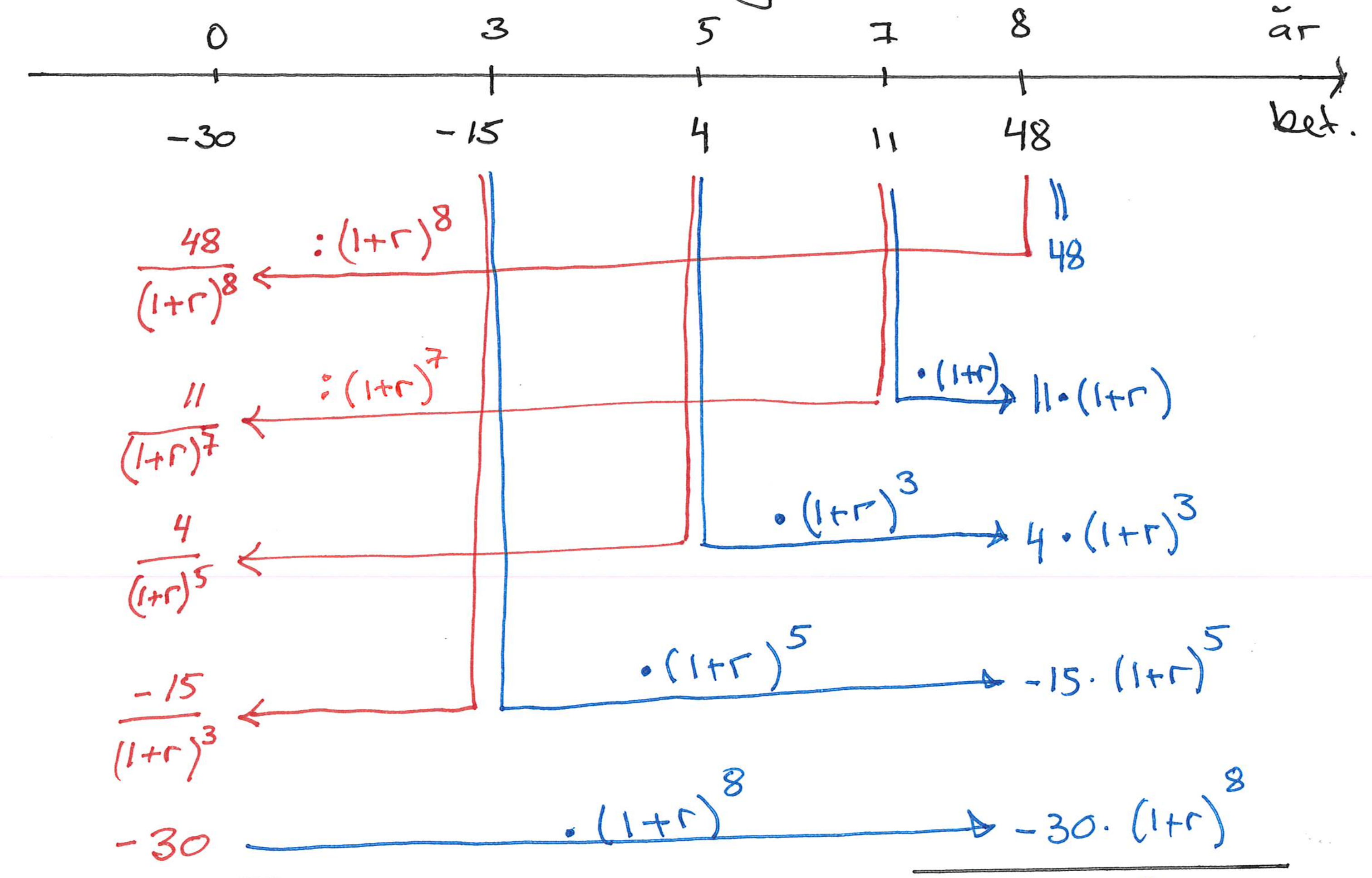
MET 1180, forelesning 4, 3. sept. 2024, Runar Ile

Plan
1. Rep: Nåverdien av en kontantstrøm
2. Geometriske rekker
3. Annuiteter

1. Rep: Nåverdien av en kontantstrøm

Oppg 8 La r være (diskonterings)renten. Kontantstrømmen:



K_0 = Sum = nåverdien til kontantstrømmen

b) Med $r = 9\%$ er nåverdien $= \underline{\underline{-8,88}}$

d) Med $r = 13\%$ er nåverdien $= \underline{\underline{-15,49}}$

K_8 = Sum = fremtidsverdien av kontantstrømmen om 8 år med rente r.

a) Med $r = 9\%$ er fremtidsv. $= \underline{\underline{-17,69}}$

c) Med $r = 13\%$ er fremtidsv. $= \underline{\underline{-41,19}}$

observasjon $\underset{=K_0}{-8{,}88} \cdot (1+9\%)^8 \overset{\text{regner}}{=} \underset{=K_8}{-17{,}69}$

$$\underset{K_0 =}{-15{,}49} \cdot (1+13\%)^8 \overset{\text{regner}}{=} -41{,}18 \approx K_8$$

Forklaring: Vi regner ut

$$\underset{\text{nåverdien}}{K_0} \cdot (1+r)^8 = \left[-30 - \frac{15}{(1+r)^3} + \frac{4}{(1+r)^5} + \frac{11}{(1+r)^7} + \frac{48}{(1+r)^8}\right] \cdot (1+r)^8$$

$$= -30 \cdot (1+r)^8 - 15 \cdot (1+r)^5 + 4 \cdot (1+r)^3 + 11 \cdot (1+r) + 48$$

$$= K_8 \text{ (fremtidsverdien om 8 år)}$$

Oppg. Hvordan må utbetalingen i dag (−30) endres slik at internrenten til den nye kontantstrømmen blir

i) 9 % ? Bet. i dag: $-30 + 8{,}88 = \underline{\underline{-21{,}12}}$

ii) 13 % ? Bet. i dag: $-30 + 15{,}49 = \underline{\underline{-14{,}51}}$

Hvordan må betalingen om 8 år (48) endres slik at fremtidsverdien om 8 år til den nye kontantstrømmen blir 0 hvis renten er

iii) 9 % ? $48 + 17{,}69 = \underline{\underline{65{,}69}}$

iv) 13 % ? $48 + 41{,}19 = \underline{\underline{89{,}19}}$

start: 15.00

2. Geometriske rekker

En rekke er en (lang) sum av tall.

Eks $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{100}$ er en rekke med 10 ledd. Vi skriver $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$

$= a_3$

Geometriske rekker: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ der hvert ledd er k ganger det foregående leddet (k er et fast tall)

$$a_2 = k \cdot a_1$$
$$a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot (k \cdot a_1) = k^2 \cdot a_1$$
$$a_4 = k \cdot a_3 = k \cdot k^2 \cdot a_1 = k^3 \cdot a_1$$
$$\vdots$$
$$a_n = k^{n-1} \cdot a_1$$

Vi kan finne et (kort) uttrykk for denne summen:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + k^3 \cdot a_1 + \dots + k^{n-1} \cdot a_1$$
$$= a_1 (\underbrace{1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n-1}}_{\frac{k^n - 1}{k - 1}})$$

antall ledd i rekken

$$= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

det første leddet

„multiplikator" (vekstfaktor)

Oppg Beregn summen

$$5 + 5\cdot 1,003 + 5\cdot 1,003^2 + 5\cdot 1,003^3 + \dots + 5\cdot 1,003^{60}$$

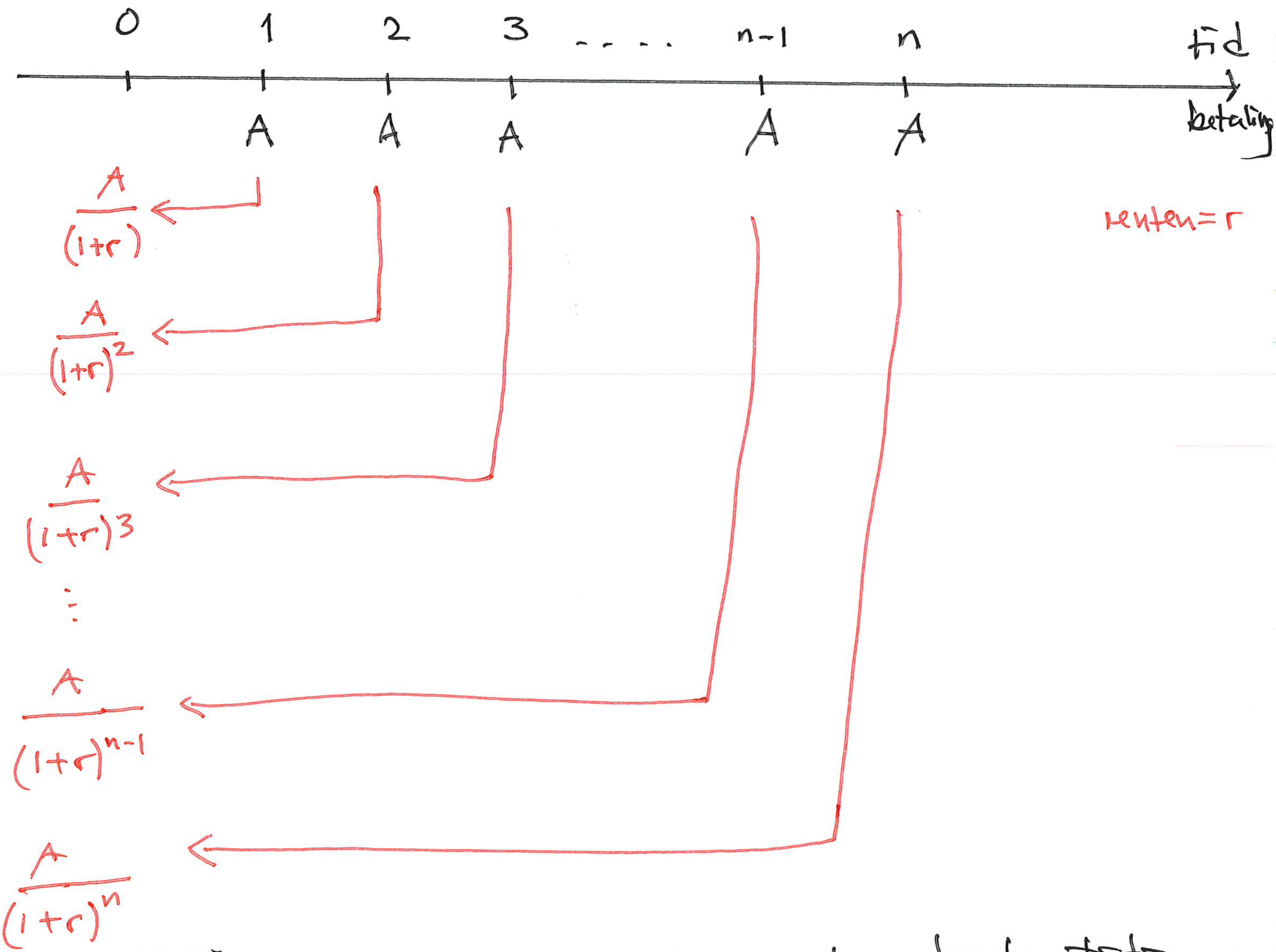
Løsning Dette er en geometrisk rekke med

$a_1 = 5$, $k = 1,003$ og antall ledd $n = 61$

Da er summen $5\cdot\frac{1,003^{61}-1}{1,003-1} = 5\cdot\frac{1,003^{61}-1}{0,003} = \underline{\underline{334,14}}$

---

3. Annuiteter - jevne (regulære) kontantstrømmer



Summen er nåverdien til denne regulære kontantstrømmen

Dette er en geometrisk rekke med $a_1 = \frac{A}{1+r}$, $k = \frac{1}{1+r}$,

antall ledd = n . Da er summen $\frac{A}{1+r}\cdot\frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+r}\right) - 1}$ - ikke så pen brøk

Men summen er også en geometrisk rekke den andre veien. Da er

$$a_1 = \frac{A}{(1+r)^n}, \quad n \text{ ledd}, \quad k = 1+r$$

Summen er da $\dfrac{A}{(1+r)^n} \cdot \dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$ — enklere å taste på kalk.

EKS Hege vurderer en investering som skal gi utbetalinger på 4 mill hvert år i 10 år, med første utbetaling om 1 år.
Anta diskonteringsrenten er 15 %.
Hva er fair pris for denne investeringen?

Løsning Fair pris = nåverdien til kontantstrøm.

$$\frac{4}{1{,}15} + \frac{4}{1{,}15^2} + \dots + \frac{4}{1{,}15^{10}}$$ – en geom. rekke

med $a_1 = \dfrac{4}{1{,}15}$, $k = \dfrac{1}{1{,}15}$, $n = 10$

så summen er $\dfrac{4}{1{,}15} \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{1{,}15}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{1}{1{,}15} - 1\right)}$

ELLER:

$a_1 = \dfrac{4}{1{,}15^{10}}$, $k = 1{,}15$ og $n = 10$ som gir

$$\frac{4}{1{,}15^{10}} \cdot \frac{1{,}15^{10} - 1}{0{,}15} = \underline{\underline{20{,}08}}$$