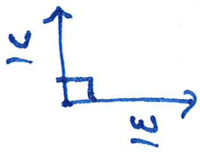
| | Emne | Lærebok | Oppgaver |
|---|---|---|---|
| 1 | Matriseregning og matrisemultiplikasjon | [E] 6.6 | [E] 6.6.1 - 6.6.5 |
| 2 | Noen regneregler for matriser | [E] 6.6 | |

## Repetisjon:

Indreprodukt/ prikkprodukt: $\underline{v}\cdot\underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \underbrace{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n}_{\text{et tall}}$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = 0 \iff \underline{v}$ og $\underline{w}$ er ortogonale

$\underline{v} \perp \underline{w}$




[E] 6.8: Pensum er fram til ortogonal projeksjon
Gjør oppgave 6.8.1, 6.8.3 (ikke 6.8.2)

## (1) Matriseregning

En $m \times n$-matrise $A$ er en rektangulær blokk med tall, med $m$ rader og $n$ kolonner

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $2\times 3$-matrise

Matrisen er kvadratisk hvis $m = n$.

Regneoperasjoner:

i) Addisjon: $A + B$
(subtraksjon) $A - B$

Kun definert hvis $A$ og $B$ har samme størrelse.

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/
Handelshøyskolen BI
Siviløkonomstudiet

ii) Skalarmultiplikasjon : $r \cdot A$  Eks: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

iii) Matrisemultiplikasjon : $A \cdot B$

$\underset{m \times n}{A} \quad \underset{n \times p}{B} \rightsquigarrow \underset{m \times p}{A \cdot B}$ ← Matrisemultiplikasjon $A \cdot B$ er kun definert når # kolonner i A = # rader i B

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

$\underbrace{2\times 2 = 2 \times 1}$

$1 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 13$
$2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = 17$

$A \cdot B$: Kombinerer vi radene i A med kolonnene i B vha "prikkeprodukt"; svaret vi får når vi kombinerer rad i i A med kolonne j i B står på plass (i,j) i AB.

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\underbrace{2\times 2 = 2 \times 2}$

| | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$ |
|---|---|
| $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = AB$ |

$\boxed{\text{Merk: } A \cdot B \neq B \cdot A}$

Eks: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{2\times 2 = 2 \times 2}$

## Lineære system på matriseform:

Eks:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+w &= 4 \\ x-y+z+2w &= 3 \\ 2x+3y-z &= 4 \end{aligned}\right\} \quad (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

utvidet matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

koeff. matrisen

$$A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z + 1\cdot w \\ 1\cdot x + (-1)\cdot y + 1\cdot z + 2w \\ 2\cdot x + 3y + (-1)z \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{3\times 4 \quad = \quad 4\times 1}$$

$$= \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x-y+z+2w \\ 2x+3y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Det lineære systemet på matriseform:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Husk:

$2x = 3 \Rightarrow x = 3/2$

$ax = b \Rightarrow x = b/a \quad (a \neq 0)$

**Eks:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2x2-matrise
(kvadratisk)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

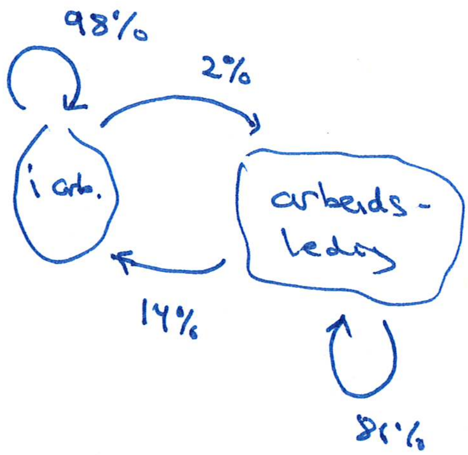
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\underline{T(\underline{v}) = A \cdot \underline{v}}$ :

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**Eks:** Arbeidsledighet




$$\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.06 \end{pmatrix}$$

tilstands-vektor

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0.98 & 0.14 \\ 0.02 & 0.86 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{i arb.} \\ \text{arb. ledig} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{i arb} & \text{arb. ledig} \end{array} & \end{array}$$

$$\underline{v}_1 = A \cdot \underline{v}_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0.98 & 0.14 \\ 0.02 & 0.86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.06 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.98 \cdot 0.94 + 0.14 \cdot 0.06 \\ 0.02 \cdot 0.94 + 0.86 \cdot 0.06 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{i arbeid} \\ \leftarrow \text{arb. ledig} \end{array}$$

Etter $n$ tidsperioder:

$$v_n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ ganger}} \cdot \underline{v_0}$$

**Potenser:**

Hvis $A$ er kvadratisk, så kan vi definere potenser av $A$:

$$\begin{cases} A^2 = \underset{n\times n = n\times n}{A \cdot A} \\ A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A \\ \vdots \end{cases}$$

**Identitetsmatrisen:** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kvadratisk matrise med 1'ere på hoveddiagonalen, 0 ellers

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Viktig egenskap:**

$A \cdot I = A$

$I \cdot A = A$

**Eks:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Transponering:**

**Eks:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

ikke symm. $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

symm. $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

**Generelt:** $A \rightsquigarrow A^T$

$A$: $m \times n$-matrise; $A^T$: $n \times m$-matrise

$A$ kalles <u>symmetrisk</u> hvis $A^T = A$.

## ② Noen regneregler for matriser

Transponering: i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Eks: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}}_{AB} \leadsto \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{(AB)^T}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Determinant: i) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

ii) $|A^T| = |A|$

iii) $|c \cdot A| = c^n \cdot |A|$ ($n$ = ant rader/kolonner i $A$)

Matrisemultiplikasjon:

Husk at $AB \neq BA$.

Andre regneregler som før: $A \cdot (B + C) = AB + AC$

Eks: $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = \underline{A \cdot A} + \underbrace{A \cdot B + B \cdot A} + \underline{B \cdot B}$

$= A^2 + (AB + BA) + B^2$