	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgavegjennomgang		
2	Indreprodukt og ortogonalitet	[E] 6.8	[E] 6.8.1, 6.8.3

Pensum: 6.8 fram til Ortogonal projeksjon
Oppgave: 6.8.1, 6.8.3 (ikke 6.8.2)

① Repetisjon

vektorer og vektorregning

- addisjon, skalarmultiplikasjon
- lengden av en vektor
- lineærkombinasjoner, vektorlikninger

$a_1 \cdot \underline{v_1} + a_2 \cdot \underline{v_2} + \dots + a_r \underline{v_r} = \underline{w}$

vektorlikning = lineært system

Oppgaver

8. $x_1 \underline{v_1} + x_2 \underline{v_2} + x_3 \underline{v_3} = \underline{b}$ har løsninger

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & -1 & b \\ 1 & 4 & 1 & c \\ 1 & 3 & 7 & d \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 3 & 0 & c-a \\ 0 & 2 & 6 & d-a \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -3 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 6 & c-a-3(b-a) \\ 0 & 0 & 10 & \boxed{d-a-2(b-a)} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ -10/6 \end{matrix}$$

$2a-3b+c$

$a-2b+d$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 6 & 2a-3b+c \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+d-\frac{10}{6}(2a-3b+c) \end{array}\right)$$

trappeform

$a-2b+d-\frac{10}{6}(2a-3b+c)=0$: én entydig løsn. for (x_1,x_2,x_3)

— " — $\neq 0$: ingen løsn.

<u>Konkl:</u> <u>b</u> er en lin. komb av $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$

$$\Updownarrow$$

$$a-2b+d-\frac{10}{6}(2a-3b+c)=0 \quad |\cdot 6$$

$$6(a-2b+d)-10(2a-3b+c)=0$$

$$-14a+18b-10c+6d=0 \quad |:(-2)$$

$$\boxed{7a-9b+5c-3d=0}$$

<u>Eks:</u> $(a,b,c,d)=(0,0,1,1)$: $7\cdot 0-9\cdot 0+5\cdot 1-3\cdot 1 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ <u>ikke</u> en lin. komb.

9. a) Budsjettbetingelse:

Kostpris for aksjene: $60x + 75y + 320z$

Tilgjengelig for kjøp: 400.000

b) R_1, R_2, R_3 : gevinst i de tre scenariene

gevinst per aksje:

	A	B	C
1	20	5	30
2	40	-50	180
3	-20	25	-265

$$20x + 5y + 30z = R_1$$
$$40x - 50y + 180z = R_2$$
$$-20x + 25y - 265z = R_3$$
$$60x + 75y + 320z = 400'$$

Har det lineære systemet løsn. når $(R_1, R_2, R_3) = (50', 25', -100')$?

Generelt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 40 & -50 & 180 & R_2 \\ -20 & 25 & -265 & R_3 \\ 60 & 75 & 320 & 400' \end{array}\right) \quad -2,\ 1,\ -3 \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 30 & -235 & R_3 + R_1 \\ 0 & 60 & 230 & 400' - 3R_1 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{2},\ 1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 0 & -175 & R_3 + R_1 + \frac{1}{2}(R_2 - 2R_1) \\ 0 & 0 & 350 & 400' - 3R_1 + R_2 - 2R_1 \end{array}\right) \quad 2$$

$\frac{1}{2}R_2 + R_3$

$400' - 5R_1 + R_2$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|l} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 0 & -175 & \frac{1}{2}R_2 + R_3 \\ 0 & 0 & 0 & 400' - 5R_1 + R_2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}R_2 + R_3\right) \end{array}\right)$$

trappeform $\quad 400' - 5R_1 + 2R_2 + 2R_3$

$400' - 5R_1 + 2R_2 + 2R_3 = 0$: Kan løse for (x, y, z), én entydig løsn = én entydig portefølje

$\boxed{5R_1 - 2R_2 - 2R_3 = 400'}$

$400' - 5R_1 + 2R_2 + 2R_3 \neq 0$: ingen løsn. = ingen portefølje

b) $R_1 = 50'$, $R_2 = 25'$, $R_3 = -100'$

$5 \cdot 50' - 2 \cdot 25' - 2 \cdot (-100')$

$= 250' - 50' + 200' = \underline{400'}$ $\underline{\text{ok}}$ $\Rightarrow$ fins én entydig portefølje

finn (x, y, z) vha baklengs substitusjon

c) $R_1 > 0$, $R_2 = 0$, $R_3 = 0$

$5R_1 - 2\cdot 0 - 2 \cdot 0 = 400'$

$R_1 = \frac{400'}{5} = 80' > 0$ $\underline{\text{Ja}}$

d) $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $R_3 > 0$

$R_1 = R_2 = R_3$ (som eksempel, fins andre muligheter)

$5R_1 - 2R_1 - 2R_1 = R_1 = 400'$

$\Rightarrow R_1 = 400'$ $R_2 = 400'$ $R_3 = 400'$

$\underline{\text{Alt:}}$

$$\begin{aligned} 80x + 80y + 350z &= 400' + R_1 \\ 100x + 25y + 500z &= 400' + R_2 \\ 40x + 100y + 55z &= 400' + R_3 \\ 60x + 75y + 320z &= 400' \end{aligned}$$

② Indreprodukt og ortogonalitet av vektorer

Defn. Hvis $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ og $\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ definerer vi indreproduktet (prikkprodukt) som

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \underbrace{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n}_{\text{et tall}}$$

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = \underline{1}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 = \underline{5} = \|\underline{v}\|^2$$

Generelt: $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$:

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{v} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$$

Defn: Vi sier at $\underline{v}$ og $\underline{w}$ er ortogonale hvis $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

Tolkningen er at $\underline{v}$ og $\underline{w}$ danner en vinkel på 90° (rett vinkel), dvs $\underline{v}$ står normalt på $\underline{w}$.

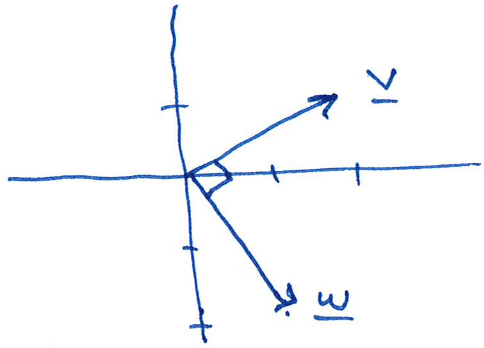
Forklaring:

Eks: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

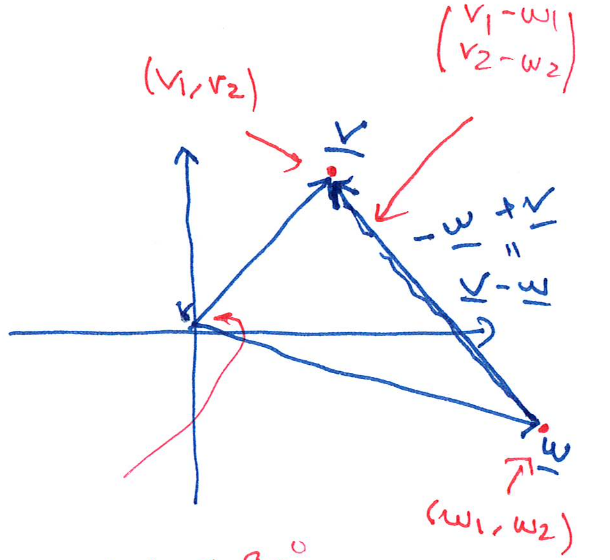
$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$



Med koordinater:

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$



vinkel = 90°

$\Uparrow$

$\underbrace{\|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2}_{\underline{v}\cdot\underline{v} + \underline{w}\cdot\underline{w}} = \underbrace{\|\underline{v} - \underline{w}\|^2}_{(\underline{v}-\underline{w})\cdot(\underline{v}-\underline{w})}$

V.S.: $\underline{v_1}^2 + \underline{v_2}^2 + \underline{w_1}^2 + \underline{w_2}^2$

H.S.: $(v_1 - w_1) \cdot (v_1 - w_1)$

$+ (v_2 - w_2) \cdot (v_2 - w_2)$

$= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2$

$= \underline{v_1}^2 - 2 v_1 w_1 + \underline{w_1}^2 + \underline{v_2}^2 - 2 v_2 w_2 + \underline{w_2}^2$

VS = HS: $-2 v_1 w_1 - 2 v_2 w_2 = 0 \quad | : (-2)$

$v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$

$\boxed{\underline{v} \cdot \underline{w} = 0}$

Fakta: $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \Leftrightarrow$ vinkelen mellom $\underline{v}$ og $\underline{w}$ er 90°

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\underline{v}$ og $\underline{w}$ er ortogonale $\quad \underline{v} \perp \underline{w}$