| | Emne | Lærebok | Oppgaver |
|---|---|---|---|
| 1 | Vektorer og vektorregning | [E] 6.5 | [E] 6.5.1 - 6.5.2 |
| 2 | Vektorlikninger | [E] 6.5 | [E] 6.5.3 - 6.5.4 |

**Repetisjon:**

Lineært system på matriseform: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

I tilfellet systemet er kvadratisk ($A$ er $n \times n$-matrise):

a) Systemet har én entydig løsning $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

ingen eller uendelig mange løsn $\Leftrightarrow |A| = 0$

b) Hvis $|A| \neq 0$: Løsningen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er gitt ved Kramers regel:

$$\boxed{x_1 = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\underline{b})|}{|A|}}$$

der $A_i(\underline{b})$ er matrisen vi får når vi bytter ut kolonne $i$ i $A$ ved $\underline{b}$.

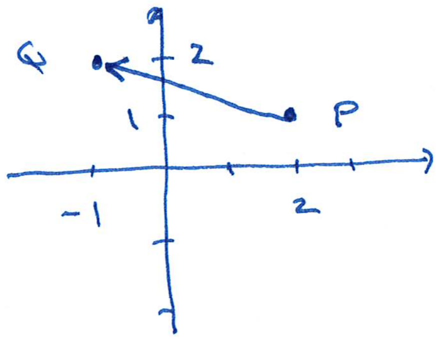
## 1 Vektorer og vektorregning:

**Eks:** $P = (2,1)$ $Q = (-1,2)$

$\overrightarrow{PQ}$ = vektor fra $P$ til $Q$

$\overrightarrow{PQ} = (-1-2, 2-1) = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$

$= (-3, 1)$



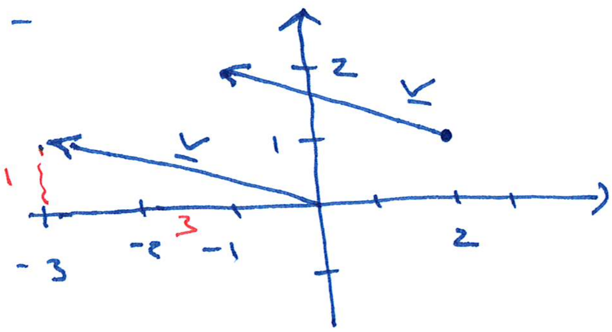

**Vektor:** noe som har størrelse og retning

**Skrivemåte:** $\underline{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_x$ : x-komponenten til $\underline{v}$

$v_y$ : y-komponenten til $\underline{v}$

Symbol: v med strek under, bruker kolonnevektor-notasjon




**Lengden til vektoren:**

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

## Vektorer i n-dim. koordinatsystemer

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

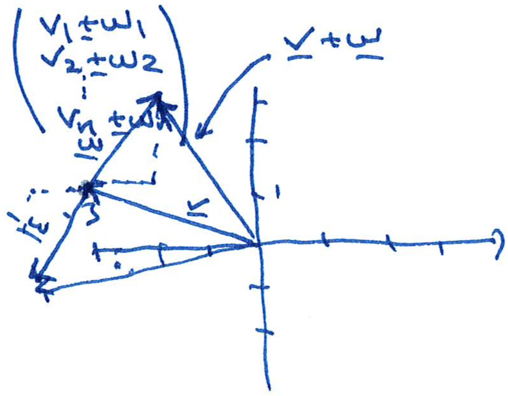
$v_i$ : komponenten til $\underline{v}$ i $x_i$-retning

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

## Vektorregning:

**Addisjon:** (subtraksjon)

$$\underline{v} \pm \underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \pm w_1 \\ v_2 \pm w_2 \\ \vdots \\ v_n \pm w_n \end{pmatrix}$$




**Eks:**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \underline{v}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{= \underline{w}} = \begin{pmatrix} -3+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

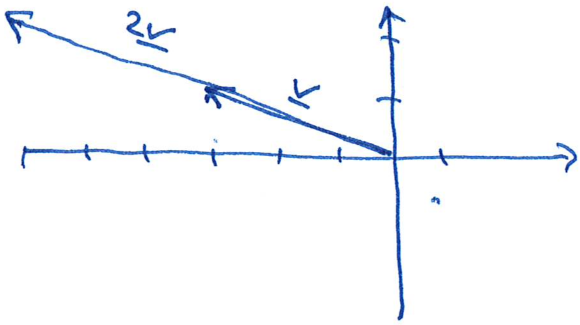
$$\underline{v} - \underline{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

**Skalarmultiplikasjon:** skalar = tall

$$a \cdot \underline{v} = a \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 \\ av_2 \\ \vdots \\ av_n \end{pmatrix}$$

**Eks:** $\underbrace{-1 \cdot \underline{w}}_{= -\underline{w}} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Eks: $2\cdot \underline{v} = 2\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-3)\\2\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$




## Lineærkombinasjoner av vektorer:

Eks: $\underline{v} + 3\underline{w} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}}$

$\underline{v} - \underline{w} = \underline{v} + (-1)\cdot\underline{w} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}}$

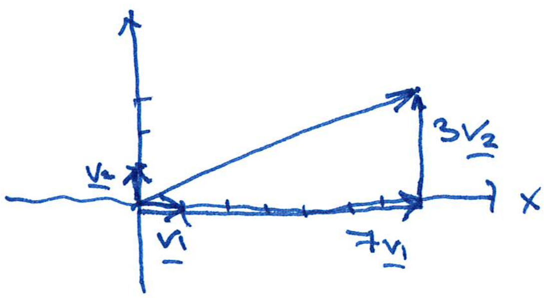
Defn: Hvis $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_r}$ er vektorer (med samme antall komponenter) og $a_1, a_2, \ldots, a_r$ er skalarer (tall), så kalles uttrykket

$$\boxed{a_1\cdot\underline{v_1} + a_2\cdot\underline{v_2} + \ldots + a_r\cdot\underline{v_r}}$$

en <u>lineærkombinasjon</u> av vektorene $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_r}$.

Eks: $\underline{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = 7\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ er en lin. komb. av $\underline{v_1}, \underline{v_2}$



Eks: $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Er $\underline{w}$ en lineærkombinasjon av $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$? Nei!

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

← vektorlikning

ingen løsning

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \iff \underbrace{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \quad &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}}_{\text{lineært system}}$$

Bruker Gauss-eliminasjon:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} ]\cdot(-1) \\ \\ ]\cdot(-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & +2 \\ 0 & 3 & -3 & 7 \end{array}\right) ]\cdot(-3)$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_3} & \underline{w} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right)$$

ingen løsning

Eks: $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Er $\underline{w}$ lin. komb. av $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$? Ja! På én måte

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} ]\cdot(-1) \\ \\ ]\cdot(-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right) ]\cdot(-3) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y - z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned} \Bigg\} \quad -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

**Eks:** Eksamen 12/2021, Oppg 3c

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \underline{v_4} = \begin{pmatrix}4\\a\\-3\end{pmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

**Løsning:** $x_1 \cdot \underline{v_1} + x_2 \cdot \underline{v_2} + x_3 \underline{v_3} + x_4 \cdot \underline{v_4} = \underline{w}$ ← For hvilke verdier av a har lkn. løsning?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & a & 1 \\ 5 & 12 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \\ -5 \end{matrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a-12 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -23 & -10 \end{array}\right) -2$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a-12 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -23-2(a-12) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a-12 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

$a = 1/2$: $x_3, x_4$ fri, uendelig mange løsn.

$a \neq 1/2$: $x_3$ fri, — " —

**Konklusjon:** $\underline{w}$ er en lin. komb. av $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_4}$ for **alle a**

Hvilken lineærkomb?

$a = 1/2$:
$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z + 4w &= 2 \\ y - z - \tfrac{23}{2} w &= -5 \\ z, w \text{ fri} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y &= z + \tfrac{23}{2} w - 5 \\ x &= 2 - z - 4w - 2\left(z + \tfrac{23}{2} w - 5\right) \\ &= 12 - 3z - 27w \end{aligned}$$

$z, w$ fri

$a \neq 1/2$: som over, men $z$ fri og $(1-2a)w = 0 \Rightarrow \underline{w = 0}$

$$\left.\right\} \quad \begin{aligned} x &= 12 - 3z \\ y &= z - 5 \\ w &= 0 \end{aligned} \qquad z \text{ fri}$$

$$\boxed{\underline{w} = 12\underline{v_1} - 5\underline{v_2}}$$

I begge tilfeller kan vi sette $z = w = 0$ for å finne én av løsn: $(x, y, z, w) = (12, -5, 0, 0)$