	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Determinanter	[E] 6.4	[E] 6.4.1 - 6.4.4
2	Determinanter og lineære systemer	[E] 6.4	[E] 6.4.5 - 6.4.7

① Determinanter

A = $n \times n$-matrise $= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{n}$ $\}n$ $\rightsquigarrow$ $\det(A) = |A|$ determinanten til A, et tall

n=2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Hoveddiagonalen

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = -11$

n>2: Beregning av determinant ved
- i) Kofaktorutvikling
- ii) Gauss-eliminasjon

i) Kofaktorutvikling: langs en rad eller en kolonne

Eks:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

C_{ij} = kofaktor i rad i, kol. j.
$= (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

minoren i rad i, kol. j

Kofaktorutvikling langs første rad:

$|A| = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{13}$
$= 1 \cdot \left(+1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}\right) + 1 \cdot \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}\right) + 1 \cdot \left(+1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right)$
$= 1 \cdot (18 - 12) - 1 \cdot (9 - 4) + 1(3 - 2) = 6 - 5 + 1 = 2$

$$\underbrace{C_{ij}}_{\substack{\text{kofaktor}\\ \text{i rad } i,\\ \text{kol } j}} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\substack{\text{fortegn}\\ \text{i rad } i,\\ \text{kol } j}} \cdot \underbrace{M_{ij}}_{\substack{\text{minor i}\\ \text{rad } i,\\ \text{kol } j}}$$

Fortegn: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1(9-4) + 2(9-1) - 3(4-1) = -5 + 16 - 9 = \underline{\underline{2}}$$

Minor: M_{ij} = determinanten til matrisen vi får når vi sletter rad i, kol j

Fakta: * Kofaktorutvikling av A langs en hvilken som helst rad eller kolonne gir samme svar, $|A|$.

→ Velger den som gir lettest regning.

* Kofaktorutvikling er en <u>generell metode</u>, og er en <u>rekursiv metode</u>.

Eks:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = \underline{aei} + \underline{bfg} + \underline{cdh} - ceg - \underline{afh} - \underline{bdi}$$

$$= a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg)$$

ii) Determinant vha Gauss-eliminasjon

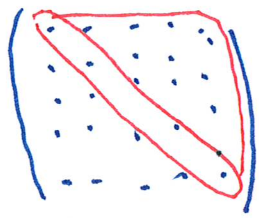
Eks: $$A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1)\end{matrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2)\end{matrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{pmatrix} = T$$

$$|T| = +1 \cdot \begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix} - 0 \cdot * + 0 \cdot *$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 3) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

$$\Rightarrow |A| = |T| = \underline{\underline{2}}$$

Defn: En kvadratisk matrise (n×n-matrise) kalles <u>øvre</u> <u>triangulær</u> hvis alle tall under hoveddiagonalen er null.



Fakta:
1) En kvadratisk trappeform er øvre triangulær.
2) Determinanten til en øvre triangulær matrise er produktet av tallene på hoveddiagonalen.
3) Hvis $A \to B$ er en elementær radoperasjon gitt ved å legge til et multippel av en rad til en annen rad, så er $|B| = |A|$.

Men: Hvis det er å bytte om to rader: $|B| = -|A|$

— " — å mult. en rad med $c \neq 0$: $|B| = c \cdot |A|$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 10 = \underline{\underline{-10}}$$

2 Determinanter og lineære systemer

Kvadratiske ($n \times n$) lineære system

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad\vdots \\ \underbrace{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n}_{n \text{ variabler}} &= b_n \end{aligned}\right\} \ n \text{ likn.}$$

Merk: når systemet er kvadratisk ($n \times n$) kan vi finne $|A|$.

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

utvidet koeff. matrise $\qquad$ koeff. matrisen $(n \times n)$

Fakta For et $n \times n$ lineært system med koeff. matrise A har vi:

i) $|A| \neq 0 \iff$ systemet har én entydig løsn.

ii) $|A| = 0 \iff$ systemet har ingen eller uendelig mange løsninger

Eks. på trappeformer m/ $n=3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

én entydig løsn. — ingen løsn. — uendelig mange løsn, z fri (én frihetsgrad)

$|A| = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12 \neq 0$ — $|A| = 1 \cdot 3 \cdot 0 = 0$ — $|A| = 1 \cdot 3 \cdot 0 = 0$

Eks:
$$\begin{aligned} x + 2y - az &= a-1 \\ ax + 2y - z &= 3 \\ x + (a+1)y - z &= 3 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ a & 2 & -1 & 3 \\ 1 & a+1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

3×3 lin. system m/ parameter a

mulig men kronglete å bruke Gauss

Alt:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a+1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$+ (-a) \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (-2 + (a+1)) - 2(-a+1) - a(a(a+1) - 2)$$

$$= -1 + a + 2a - 2 - a^3 - a^2 + 2a =$$

$|A| = -a^3 - a^2 + 5a - 3$

- $|A| = 0$: ingen eller uendelig mange løsn
- $|A| \neq 0$: én entydig løsn.

$-a^3 - a^2 + 5a - 3 = 0$:

Løser likn. ....

fortsetter med dette i neste uke, sammen med Kramers regel