	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgavegjennomgang		
2	Gauss-Jordan eliminasjon	[E] 6.2	6.2.5
3	Frie variabler og løsninger av lineære systemer	[E] 6.3	6.3.1 - 6.3.8

① Repetisjon:

Likningssystemer → Innsettingsmetoden (generell)

Likningssystemer → Gauss-eliminasjon (lineære systemer)

i) Skriv ned den utvidede koeff.-matrisen til det lin. systemet

ii) Gjør om til trappeform vha elementære radoperasjoner

iii) Skriv tilbake til lin. system og bruk baklengs subst.

Oppgaveark 31

6b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2/3 \\ -7/3 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1-\frac{8}{3} & -1 & 1-\frac{4}{3} \\ 0 & 2-\frac{28}{3} & -2 & 3-\frac{14}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -3 & -1 \\ 0 & -22 & -6 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \\ \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

trappeform

$$3x + 4y + 3z = 2$$
$$-11y - 3z = -1$$
$$0 = -3$$

ingen løsning

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/
Handelshøyskolen BI
Siviløkonomstudiet

Alt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \;-1 \;\rightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \;-2 \;\; -7$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -3 & -1 \\ 0 & -33 & -9 & -4 \end{array}\right) \;-3 \;\rightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

trappeform

7.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 11 & 16 \end{array}\right) \;-1 \;\; -1 \;\rightarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 10 & 6 \end{array}\right) \;2$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

trappeform

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 10 \quad (1) \\ y + 3z - 2w &= -3 \quad (2) \\ 6z + 6w &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

(3) $6z + 6w = 0$

$\frac{6z}{6} = \frac{-6w}{6}$

$\underline{z = -w}$

(2) $y + 3z - 2w = -3$

$y + 3(-w) - 2w = -3$

$y = \underline{-3 + 5w}$

(1) $x + (-3 + 5w) + (-w) + w = 10$

$x = \underline{13 - 5w}$

Løsning: $(x, y, z, w) = (13 - 5w, -3 + 5w, -w, w)$ der $\underline{w \text{ er fri}}$

$= \underline{(13 - 5t, -3 + 5t, -t, t)}$ t = parameter

<u>uendelig mange løsn</u> $\begin{cases} x, y, z: & \text{avhengige variabler} \\ w: & \text{fri variabel} \end{cases}$

8b) $2xy + y^3 + y^2 = 0$ $\quad y(2x + y^2 + y) = 0 \quad y = 0$ eller $2x + y^2 + y = 0$

og

$x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0 \quad x(x + 3y^2 + 2y) = 0 \quad x = 0$ eller $x + 3y^2 + 2y = 0$

a) $y = 0, x = 0 \qquad (x,y) = (0,0)$

b) $y = 0,\ x + 3y^2 + 2y = 0 \qquad x = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

c) $2x + y^2 + y = 0,\ x = 0 \qquad y^2 + y = 0 \quad y(y+1) = 0 \quad y = 0$ eller $y = -1$

$x = 0 \qquad x = 0$

$(x,y) = (0,0), (0,-1)$

d) $2x + y^2 + y = 0,\ x + 3y^2 + 2y = 0$

$\Downarrow$

$x = -3y^2 - 2y$

$2(-3y^2 - 2y) + y^2 + y = 0$

$-5y^2 - 3y = 0$

$-y(5y + 3) = 0 \Rightarrow y = 0$ eller $y = -3/5$

$x = 0 \qquad x = -3 \cdot 9/25 + 6/5$

$= \frac{-27}{25} + \frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 5}$

$= 3/25$

$(x,y) = (0,0), (3/25, -3/5)$

Løsn:

$(x,y) = (0,0), (0,-1),$

$(3/25, -3/5)$

② + ③ Gauss- og Gauss-Jordan eliminasjon

Fakta: – enhver matrise kan omformes til en trappeform vha elementære radoperasjoner

– men trappeformen er ikke entydig

Defn: Pivotposisjoner = posisjonene i matrisen som inneholder en pivot når matrisen er på trappeform

Fakta: – pivotposisjonene er alltid de samme

– pivotposisjoner bestemmer antall løsninger i det lineære systemet:

(1) pivotposisjon i siste kolonne:

$\Rightarrow$ ingen løsninger (inkonsistent)

(2) ingen pivotposisjon i siste kolonne:

$\Rightarrow$ det fins minst én løsn. (konsistent)

(2a) pivotposisjon i alle variabelkolonner

$\Rightarrow$ én løsning

(2b) minst en variabelkolonne uten pivotpos.

$\Rightarrow$ uendelig mange løsn.

Eks: (1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to 0x+0y+0z=3$$

trappe form

umulig $\Rightarrow$ ingen løsn.

(2a)

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \underline{x} + 2y + 3z &= 3 \\ \underline{4y} + z &= -2 \\ \underline{7z} &= 5 \end{aligned}$$

alle variablene er avhengige, kan løse for x, y, z

$\Rightarrow$ én løsn.

2(b)

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \underline{x} + 2y + 3z &= 3 \\ \underline{4y} + z &= -2 \end{aligned}$$

x, y : avhengige var.
z : fri var.

én fri variabel $\Rightarrow$ uendelig mange løsn.

Resultat:

Ethvert lineært system har enten

i) ingen løsn. } inkonsistent
ii) én løsn.
iii) uendelig mange løsn. } konsistent

Antall løsn. bestemmes av pivotposisjonene

Gauss-Jordan eliminasjon

Defn: En redusert trappeform er en trappeform som oppfyller tilleggsbetingelsene:

i) alle pivoter = 1

ii) alle elementer over en pivot = 0

Eks:

$$x+y+z=3$$
$$x+2y+4z=7$$
$$x+3y+9z=13$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{2}$$

trappeform

Gauss-Jordan eliminasjon

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-3),\ \cdot(-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

redusert trappeform

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 1$$

Løsn: $(x,y,z)=(1,1,1)$

Fakta: den reduserte trappeformen er entydig.