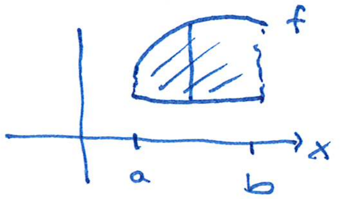
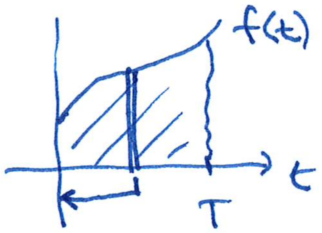
	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgavegjennomgang		
2	Systemer av likninger	[E] 6.1	6.1.1 - 6.1.6
3	Lineære likningssystemer	[E] 6.2	6.2.1 - 6.2.5

① Repetisjon:



$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$

Areal beregning

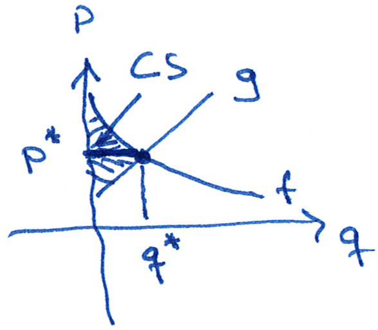


Samlet kontantstrøm

$\int_0^T f(t)\,dt$

Nåverdi r (kont.) diskonteringsrente

$\int_0^T f(t) \cdot e^{-rt}\,dt$

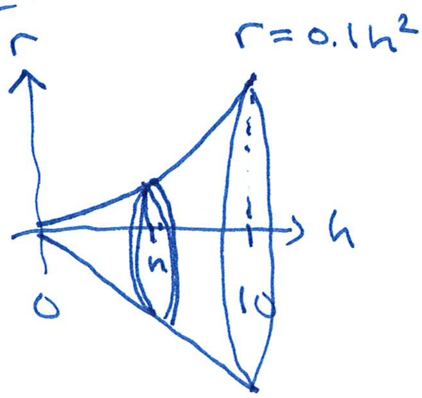


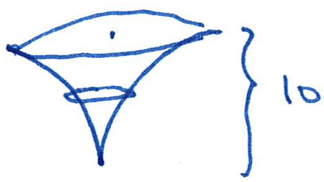
$CS = \int_0^{q^*} f(q) - p^*\,dq$

$PS = \int_0^{q^*} p^* - g(q)\,dq$

Oppgaverok 29-30

5.





$\Delta V = \pi r^2 \cdot \Delta h$

$= \pi \cdot (0.1h^2)^2 \Delta h$

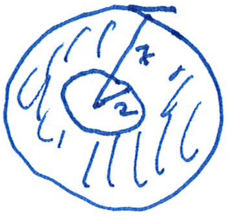
$V = \int_0^{10} \pi \cdot (0.1h^2)^2\,dh = \int^{10} \pi \cdot 0.01\,h^4\,dh$

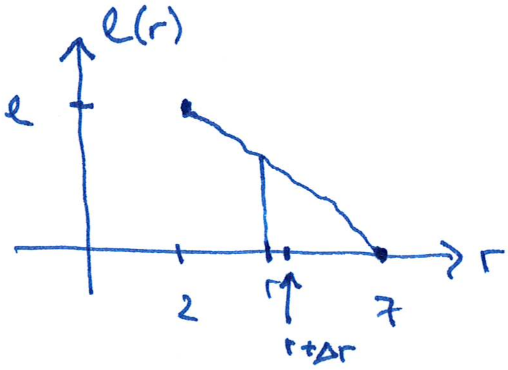
$= \pi \cdot 0.01 \left[\frac{1}{5}h^5\right]_0^{10} = \frac{\pi \cdot 0.01}{5}(100.000 - 0)$

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/
Handelshøyskolen BI
Siviløkonomstudiet

$= \frac{\pi \cdot 1000}{5} = \underline{200\pi}$

11.





$l(r)$ = lengden som er trukket ut når ytre radius har blitt r

$l(7) = 0 \qquad l(2) = l \qquad \tau = 0.05$

$$\Delta l = -\underbrace{2\pi r}_{\text{lengde per runde}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta r}{0.05}}_{\text{antall runder}} = -\frac{2\pi r}{0.05}\cdot \Delta r$$

$$\int_2^7 -\frac{2\pi r}{0.05}\,dr = l(7) - l(2) = -l$$

$$l = \int_2^7 \frac{2\pi r}{0.05}\,dr = \frac{2\pi}{0.05}\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_2^7$$

$$= \frac{20\cdot\cancel{2}\pi}{20\cdot\cancel{2}\cdot 0.05}\left(7^2-2^2\right) = 20\pi(45)$$

$$= \underline{900\pi}$$

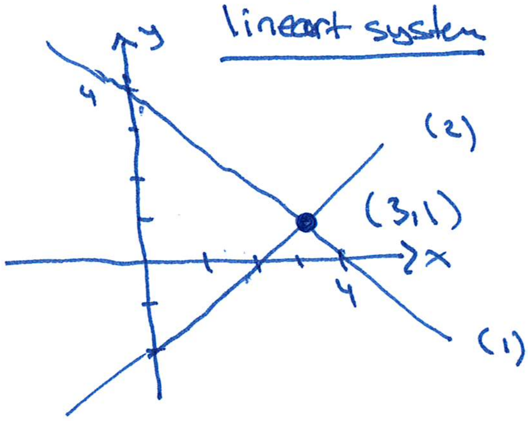
② Systemer av likninger

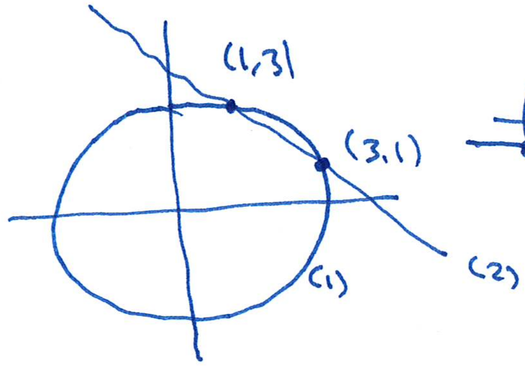
Eks:

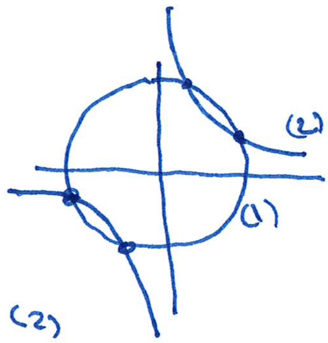
① $x+y=4 \quad (1)$
$x-y=2 \quad (2)$
lineært system

② $x^2+y^2=10 \quad (1)$
$x+y=4 \quad (2)$

③ $x^2+y^2=10 \quad (1)$
$xy=3 \quad (2)$







$xy=3 \Rightarrow y=3/x$

(1) $x+y=4 \Rightarrow y=4-x$
(2) $x-y=2 \Rightarrow y=x-2$

Entydig løsn: $(x,y)=(3,1)$

Innsettingsmetoden:

(2) $x+y=4 \Rightarrow y=4-x$
(1) $x^2+y^2=10$

$x^2+(4-x)^2=10$

$x^2+16-8x+x^2=10$

$2x^2-8x+16-10=0 \quad |:2$

$x^2-4x+3=0$

$x=1, \quad x=3$

$y=3 \quad y=1$

Løsn: $(1,3), (3,1)$

Viètes formel

$x^2-ax+b=0$

og

$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=a \\ x_1 \cdot x_2=b \end{array}\right\} \Rightarrow x=x_1$ og $x=x_2$ er løsn.

Bezout's teorem:

Et likningssystem som består av to polynomlikn. i to ukjente av grad d_1 og d_2 har "maksimalt" $d_1 \cdot d_2$ løsninger.
"typisk"

③ $x^2+y^2=10$ (1) grad=2
$xy=3$ (2) grad=2
$\Big\}$ $d_1 \cdot d_2 = 2 \cdot 2 = 4$

Innsettingsmetoden:

(2) $xy=3 \Rightarrow y = 3/x = 3/x$

(1) $x^2+y^2=10$

$x^2+(3/x)^2=10$

$x^2+\frac{9}{x^2}=10 \quad | \cdot x^2$

$x^4+9=10x^2$

$x^4-10x^2+9=0$

$u=x^2$: $u^2-10u+9=0$

$u=1$ eller $u=9$

$x^2=1$ " $x^2=9$

$x=\pm 1$ eller $x=\pm 3$

Løsn: $(x,y)=(1,3),\ (3,1)$
$(-1,-3),\ (-3,-1)$

③ Lineære systemer = lineære likningssystemer

Eks:
$x+y+z=3$
$x+2y+4z=7$
$x+3y+9z=13$

3x3 lineært system på standard form

likninger = 3

ukjente = 3

Defn: Et mxn lineært system er et system av m likninger i n ukjente (variabler) der hver likning er lineær.

Metode: Gauss-eliminasjon er en generell metode som kan brukes til å løse alle lineære systemer.

Standard form for $m \times n$ lineært system:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}}$$

Gauss-eliminasjon:

Utvidede matrise til det lin. systemet

Eks:

$$\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+2y+4z=7 \\ x+3y+9z=13 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x\text{-kol} & y\text{-kol.} & z\text{-kol.} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \cdot(-1) \qquad (-1\ -1\ -1 \mid -3)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) \cdot(-2) \qquad (0\ -2\ -6 \mid -8)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

trappeform

Elementære radoperasjoner

(i) Bytte om to rader
(ii) Multiplisere en rad med $c \neq 0$
(iii) Legge til et multippel av en rad til en annen rad

Pivot = første tall $\neq 0$ i en rad

Trappeform: En matrise er på trappeform hvis:

i) alle null rader er nederst
ii) hver pivot er lenger til høyre enn pivotene i radene over

$$x + y + z = 3 \quad (1)$$
$$y + 3z = 4 \quad (2)$$
$$2z = 2 \quad (3)$$

Løsn: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

Baklengs substitusjon

(3) $\frac{2z}{2} = \frac{2}{2}$ $\quad z = 1$

(2) $y + 3z = 4$

$y + 3 \cdot (1) = 4$

$y = 1$

(1) $x + 1 + 1 = 3$

$x = 1$