MET 1180, forelesning 3, 29. aug. 2024, Runar Ile

Plan
1. Nåverdi
2. Noen eksempler
3. Den totale nåverdien til en kontantstrøm og internrente.

1. Nåverdi

La K_0 være en investering/innskudd/betaling i dag. Fremtidsverdien K_n av K_0 om n år (el. terminer) med terminrente r er

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Omvendt Anta K_n skal betales om n år. Da er nåverdien K_0 av K_n med rente r gitt som

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Eks Bestem nåverdien av 30 mill utbetalt om 5 år med 8 % rente.

Løsning $K_0 = \dfrac{30 \text{ mill}}{1{,}08^5} = \underline{\underline{20{,}42 \text{ mill}}}$

2. Noen eksempler

Oppg Verdien til Kåres leilighet øker med 10 % det første året og faller med 30 % det andre året. Beregn den relative verdiendringen for disse to årene tilsammen.

(Hint: svaret er ikke −20 %)

Løsning

Relativ verdiendring første år : $r_1 = 0{,}1$

— " — andre — " — : $r_2 = -0{,}3$

Vekstfaktor for det første året : $1 + r_1 = 1{,}1$

— " — andre — " — : $1 + r_2 = 0{,}7$

— " — de to årene tilsammen :

$$(1+r_1)\cdot(1+r_2) = 1{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}77$$

Så relativ verdiendring for de to årene tilsammen er $0{,}77 - 1 = -0{,}23 = \underline{\underline{-23\,\%}}$

Mønster Relative verdiendringer : $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gir den samlede relative verdiendringen

$$\underbrace{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot \ldots \cdot(1+r_n)}_{\text{vekstfaktor for den samlede endringen}} - 1$$

EKS Innskudd: 50 000

Rente: $r = 4\%$ (årlig forrentning)

Etter 5 år er balansen

$$50\,000 \cdot (1+4\%)^5 = \underline{\underline{60\,832,65}}$$

Kalkulator: 50 000 $\boxed{\times}$ 1,04 $\boxed{y^x}$ 5 $\boxed{=}$

OPPG Innskudd: 50 000

Nominell rente: 4 %

Månedlig forrentning

a) Beregn balansen etter 5 år.

b) Bestem den effektive renten.

Løsning Månedsrenten er $\frac{4\%}{12} = \frac{1}{3}\%$ ($\neq 0{,}003$, $\neq 0{,}0033$)

a) Etter 5 år er balansen

$$50\,000 \cdot \left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 50\,000 \cdot \left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{60}$$

$$= \underline{\underline{61\,049,83}}$$

b) Effektiv rente r_{eff} = den årlige renten som gir den samme balansen

= den årlige relative verdiendringen.

Den årlige vekstfaktoren er $1+r_{eff} = \left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{12}$

$= 1{,}040742$

så $r_{eff} = \underline{\underline{4{,}0742\,\%}}$

Start: 9.01

Oppg Etter 5 år med renter (årlig forrentning) har innskuddet på 50000 vokst til 60000. Beregn den effektive renten.

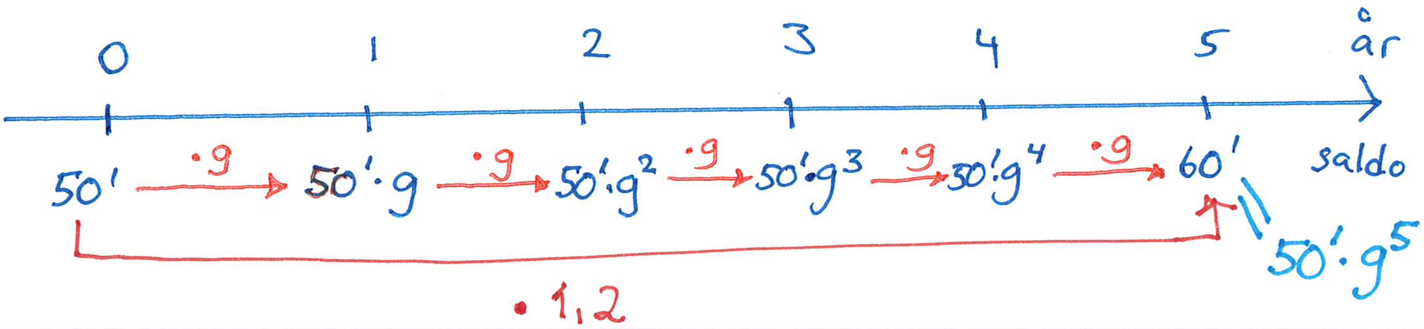
Løsning Den 5-årige vekstfaktoren er

$$\frac{60\,000}{50\,000} = 1{,}2 \,.$$

La g være årlig vekstfaktor.

Da er $g^5 = 1{,}2$.

Litt langsommere:



Da vil $50\,000 \cdot g^5 = 60\,000 \quad \big| : 50\,000$

$$g^5 = \frac{60\,000}{50\,000}$$

dvs $\quad g^5 = 1{,}2$

Så den årlige vekstfaktoren

$$g = (g^5)^{\frac{1}{5}} = 1{,}2^{\frac{1}{5}}$$

$$g = 1{,}2^{0{,}2} = 1{,}03714$$

Så $r_{eff} = \underline{\underline{3{,}714\,\%}}$

3. Den totale nåverdien til en kontantstrøm og internrente.

Nåverdien til et beløp (K) som betales n år fra nå med rente r

= hva du må sette på konto i dag (K_0) for at balansen skal være K om n år hvis renten er r.

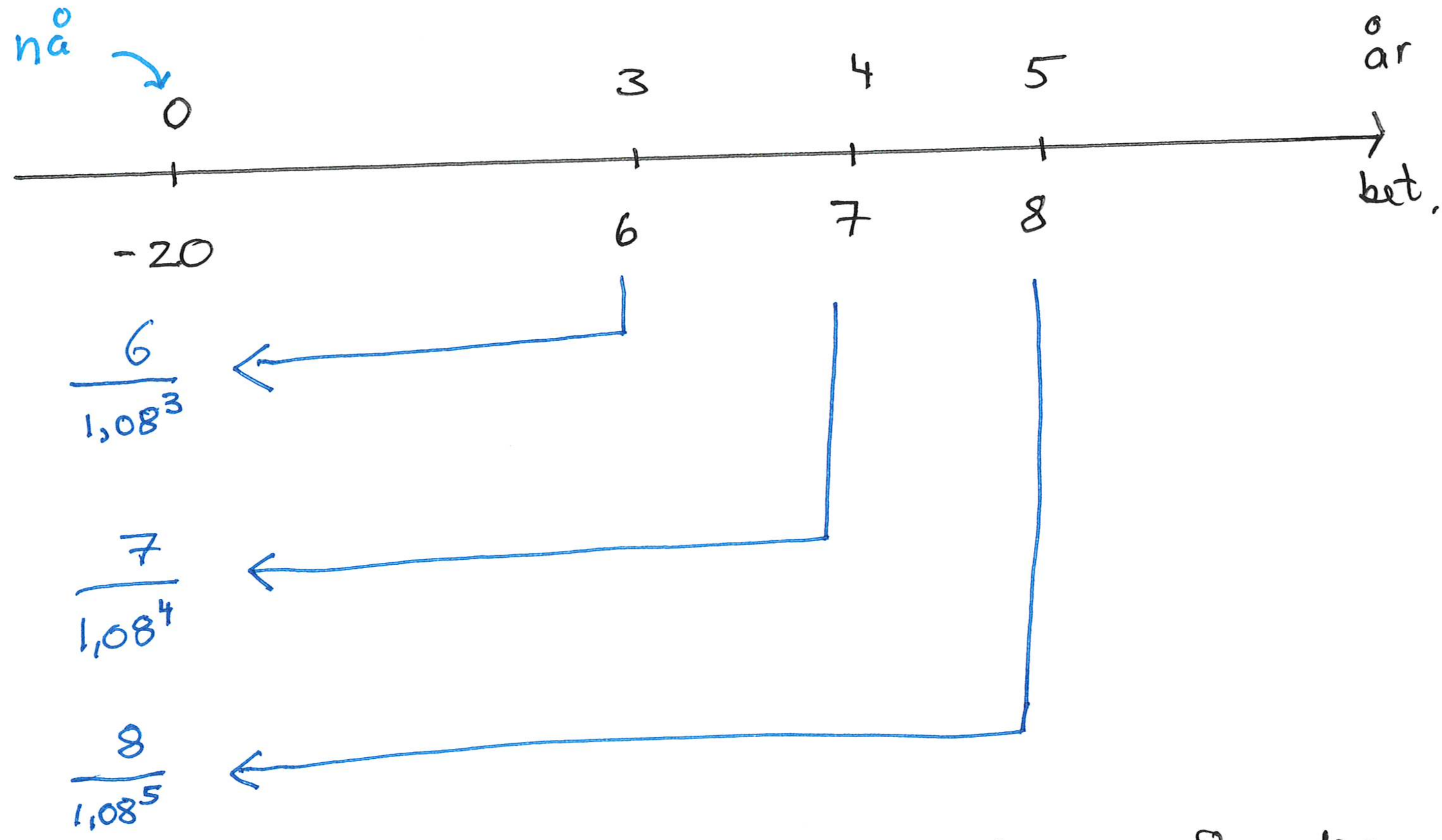
Vi kan utvide dette til kontantstrømmer (flere betalinger på ulike tidspunkter)

Eks Du betaler 20 mill i dag, og får tilbake

6 mill etter 3 år
7 —"— 4 —"—
8 —"— 5 —"—

Med 8% rente, hva er (den totale) nåverdien av kontantstrømmen?

Det er summen av nåverdiene til hver av betalingene.



Summen av nåverdiene = den totale nåverdien til kontantstrømmen

$$= -20 + \frac{6}{1{,}08^3} + \frac{7}{1{,}08^4} + \frac{8}{1{,}08^5} = \underline{\underline{-4{,}65}}$$

ulike tolkninger av dette tallet.

1) Får ikke 8% avkastning på denne investeringen.

2) Med disse tilbakebetalingene kan låntager få låne 15,35 mill (ikke 20)

3) Låntager kan betale mer (og få låne 20) f.eks. $4{,}65 \cdot 1{,}08^6$ mill ekstra etter 6 år.

- Begge disse nye kontantstrømmene har nåverdi=0

Internrenten til kontantstrømmen er den renten som gjør at nåverdien til kontantstrømmen blir 0.

- Generelt vanskelig å beregne for hånd.

I dette tilfellet må vi løse likningen

$$f(x) = -20 + \frac{6}{(1+x)^3} + \frac{7}{(1+x)^4} + \frac{8}{(1+x)^5} = 0$$

(Svar : $x \approx 1{,}12\,\%$)