	Emne	Lærebok	Oppgaver
1	Repetisjon og oppgavegjennomgang		
2	Integrasjon av rasjonale uttrykk	[E] 5.5	5.5.1 - 5.5.6

① Repetisjon

Integrasjonsregler:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int u \pm v\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$$

$$\int c \cdot u\,dx = c\int u\,dx$$

(u, v uttrykk i x, c konstant)

Integrasjonsteknikker:

* Delvis integrasjon "produktregel"

$$\boxed{\int u' \cdot v\,dx = uv - \int u v'\,dx}$$

* Substitusjon "kjerneregel" / variabelskifte

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \_\_ \text{ (uttrykk i } x) \\ du = u' \cdot dx \end{array}}$$

Oppgaveark 26

9h) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{=u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{=v}\,dx$ ← delvis integrasjon

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & v = \ln x \\ u' = 1/x & v' = 1/x \end{array}}$$

$$\int \ln x \cdot 1/x\,dx = \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot 1/x\,dx$$

$$2 \cdot \int \ln x \cdot 1/x\,dx = (\ln x)^2 + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \underline{\underline{\frac{(\ln x)^2}{2} + C}}$$

Alternativ: Substitusjon

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{u}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,du = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$\parallel$

$\int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array}}$$

$\Downarrow$

$$dx = x \cdot du$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}}$$

2 Integrasjon av rasjonale uttrykk "brøk-regel"

Husk: Et uttrykk kalles rasjonalt hvis det kan skrives $\frac{p(x)}{q(x)}$ der p, q er polynomer.

Eks:
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \underline{\ln|x| + C}$$
$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = \underline{-\frac{1}{x} + C}$$

Eks:
$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \underline{\ln|x+1| + C}$$
$$\boxed{\begin{aligned} u &= x+1 \\ du &= 1\cdot dx \end{aligned}}$$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx \neq \ln|1-x| + C \quad \leftarrow \text{vanlig feil}$$
$$= \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{(-1)}\,du = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = \underline{-\ln|1-x| + C}$$
$$\boxed{\begin{aligned} u &= 1-x \\ du &= -1\cdot dx \end{aligned}}$$
$$dx = \frac{1}{-1}\,du$$

Eks:

$$\int \frac{4}{4-2x}\,dx = \int \frac{4}{u}\cdot\frac{1}{(-2)}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 4-2x \\ du = -2\cdot dx \end{array}}$$

$$dx = \frac{1}{-2}\,du$$

$$= \frac{4}{-2}\int \frac{1}{u}\,du = -2\ln|u| + C$$

$$= \underline{\underline{-2\ln|4-2x| + C}}$$

Formel:

$$\boxed{\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C}$$

Kan brukes hvis: i) nevner har grad 1 (lineær)
ii) teller har grad 0 (konstant), dvs lavere grad enn nevner

(A) Hva skjer hvis telleren har lik eller høyere grad enn nevner? Bruk polynomdivisjon

Eks:

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int 1 + \frac{-1}{x+1}\,dx$$

$$= x + \frac{(-1)}{1}\ln|x+1| + C$$

$$= \underline{\underline{x - \ln|x+1| + C}}$$

Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l} x : x+1 = 1 \\ -(x+1) \\ \hline -1 \end{array}$$

1 ← Kvotient

−1 ← Rest

Eks:

$$\int \frac{x^3-3x+5}{x-1}\,dx = \int x^2+x-2+\frac{3}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+3\ln|x-1| + C$$

Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l} x^3 \qquad -3x+5 : x-1 = \underbrace{x^2+x-2}_{\text{Kvotient}} \\ -(x^3-x^2) \\ \hline x^2-3x+5 \\ -(x^2-x) \\ \hline -2x+5 \\ -(-2x+2) \\ \hline 3 \leftarrow \text{Rest} \end{array}$$

$$\frac{x^3-3x+5}{x-1} = x^2+x-2+\frac{3}{x-1}$$

Eks:

$$\int \frac{x^3-3x+5}{x^2-1}\,dx = \int x + \frac{-2x+5}{x^2-1}\,dx$$

$$\begin{array}{l} x^3 \qquad -3x+5 : x^2-1 = x \\ -(x^3 \qquad -x) \\ \hline -2x+5 \end{array}$$

$$\frac{x^3-3x+5}{x^2-1} = x + \frac{-2x+5}{x^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{-2x+5}{x^2-1}\,dx \;\; ?$$

B) Hva skjer om nevner har grad større enn I ?

Eks:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = \underline{-\frac{1}{x} + C}$$

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4}\,dx = \int \frac{\cancel{2x-3}}{u}\,\frac{1}{\cancel{2x-3}}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2-3x+4 \\ du &= (2x-3)\,dx \end{aligned}}$$

$$dx = \frac{1}{2x-3}\,du$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \underline{\underline{\ln|x^2-3x+4|+C}}$$

$$\int \frac{2x+5}{x^2-3x+4}\,dx = \int \frac{2x+5}{u}\,\frac{1}{2x-3}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2-3x+4 \\ du &= (2x-3)\,dx \end{aligned}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2x-3}\,du$$

$$\cancel{= \int \frac{2x+5}{2x-3}\cdot\frac{1}{u}\,du}$$

Delbrøksoppspaltning

$$\frac{2x+5}{x^2-3x+4}$$

Faktoriserer nevner: x^2-3x+4

$x^2-3x+4=0$

$(x-a)(x-b)=0$

$x^2-ax-bx+ab$

$x^2-(a+b)x+ab$

$\boxed{\begin{aligned} a+b&=3\\ ab&=4\end{aligned}}$ Vietes formel

$x^2-3x+4=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2}$$

$\Downarrow$

ingen faktorisering er mulig!

$\Rightarrow$ ingen delbrøksoppspaltning er mulig

Eks:

$$\boxed{\frac{2x+5}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}}$$

Må finne A og B.

Faktoriserer nevner: $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

$x^2-4x+3=(x-a)(x-b)=\underline{(x-3)(x-1)}$

der $a+b=4$, $ab=3$ $\quad a=3 \quad b=1$

eller $x^2-4x+3=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=3,1$$

$$\frac{2x+5}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} \quad \Big| \cdot (x-3)(x-1)$$

$$2x+5 = A(x-1) + B(x-3)$$

$$\underline{2x} + \underline{5} = Ax - A + Bx - 3B$$
$$= \underbrace{Ax + Bx} + \underbrace{(-A-3B)}$$
$$= \underline{(A+B)x} + \underline{(-A-3B)}$$

$$A + B = 2$$
$$-A - 3B = 5$$
$$\overline{-2B = 7}$$
$$B = 7/-2 = \underline{-7/2}$$

$$A + (-7/2) = 2$$
$$A = 2 + 7/2$$
$$A = \underline{11/2}$$

$$2x+5 = A(x-1) + B(x-3)$$

$x=1$: $7 = B \cdot (-2)$ $\quad B = -\frac{7}{2}$

$x=3$: $11 = A \cdot 2$ $\quad A = 11/2$

Konklusjon: Vi får en delbrøksoppspalting

$$\frac{2x+5}{x^2-4x+3} = \frac{11/2}{x-3} + \frac{-7/2}{x-1}$$

← Setter inn for A og B