MET 1180, forelesning 24, 14. nov. 2024, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon: Elastisitet
2. Lineær approksimasjon
3. Høyere grads Taylorpolynomer
4. Om eksamen
5. Hvordan forberede seg til eksamen

1. Repetisjon: Elastisitet

p = pris/enhet, $D(p)$ er etterspørselsfunksjonen

Eks $D(p) = 200 \cdot e^{-0{,}01p}$

Beregner $\varepsilon(p)$ - elastisitetsfunksjonen

$$D'(p) \overset{\text{kjerne-regel}}{=} -0{,}01 \cdot 200 e^{-0{,}01p} = -2e^{-0{,}01p}$$

så $$\varepsilon(p) = \frac{D'(p)\cdot p}{D(p)} = \frac{-2\cancel{e^{-0{,}01p}}\cdot p}{200\,\cancel{e^{-0{,}01p}}} = \underline{\underline{-0{,}01p}}$$

Etterspørselen er elastisk m.h.p. prisen hvis

$\varepsilon(p) < -1$ dvs $-0{,}01p < -1$ $\quad | \cdot(-100)$

$$\underline{\underline{p > 100}}$$

Betydning: Hvis $p > 100$ så vil en liten prisøkning gi lavere inntekt.

F.eks. $\varepsilon(110) = -0{,}01 \cdot 110 = -1{,}1$. Dvs at en prisøkning på 1% fra 110 gir etterspørsels-fall på 1,1%.

Etterspørselen er uelastisk m.h.p. prisen hvis

$\varepsilon(p) > -1$, dvs $-0{,}01p > -1$, dvs $\underline{\underline{p < 100}}$

Betydning Hvis $p < 100$ vil en liten prisøkning gi høyere inntekt.

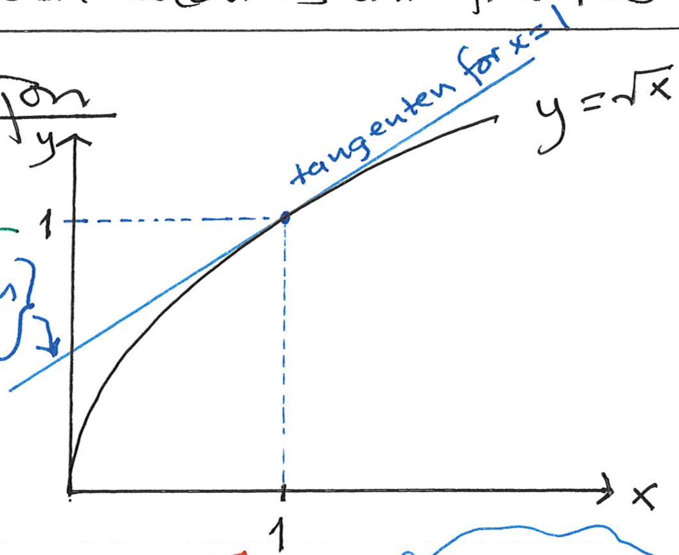
F.eks. $\varepsilon(80) = -0,01 \cdot 80 = -0,8$, så 1% prisøkning fra 80 gir 0,8% etterspørselsfall.

Hvis $\varepsilon(p) = -1$ (så $p = 100$), er etterspørselen nøytralelastisk m.h.p. prisen.

Betydning Ingen (eller veldig liten) endring i inntekten hvis prisen endres litt fra 100.

---

2. Lineær approksimasjon



Eks $f(x) = \sqrt{x}$

Den lineære approksimasjonen til $f(x)$ ved $x = 1$

Vi kan finne uttrykket for tangentfunksjonen ved ettpunktsformelen

$$y - 1 = f'(1) \cdot (x - 1)$$

så $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$

dvs $y = \underbrace{1}_{=f(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=f'(1)}(x - 1) = P_1(x)$

– kalles Taylorpolynomet av grad 1 ved $x = 1$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

F.eks. $P_1(1,1) = 1 + \frac{1}{2}(1,1 - 1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 1,05$ (sjekk: $\sqrt{1,1} = 1,04881\ldots$)

3. Taylorpolynomer av høyere grad

Eks $f(x)=\sqrt{x}$. Da er Taylorpolynomet av grad 2 til $\sqrt{x}$ ved $x=1$ gitt som

$$P_2(x) = \overbrace{f(1)+f'(1)\cdot(x-1)}^{P_1(x)} + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$= 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{-1}{4\cdot x\cdot\sqrt{x}}$$

$$f''(1)=\frac{-1}{4\cdot 1\cdot\sqrt{1}}=-\frac{1}{4}$$

Mønster (Taylorp. av grad 2 ved $x=a$)

$$\boxed{P_2(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}$$

I eks. er $a=1$.

$$\sqrt{2}=f(2)\approx P_2(2)=1+\frac{1}{2}(2-1)-\frac{1}{8}(2-1)^2$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=1,375$$

(sjekk: $\sqrt{2}=1,41421\ldots\ldots$)

$$P_2(1,2)=1+\frac{1}{2}(1,2-1)-\frac{1}{8}(1,2-1)^2$$

$$=1+0,1-0,005=1,0950$$

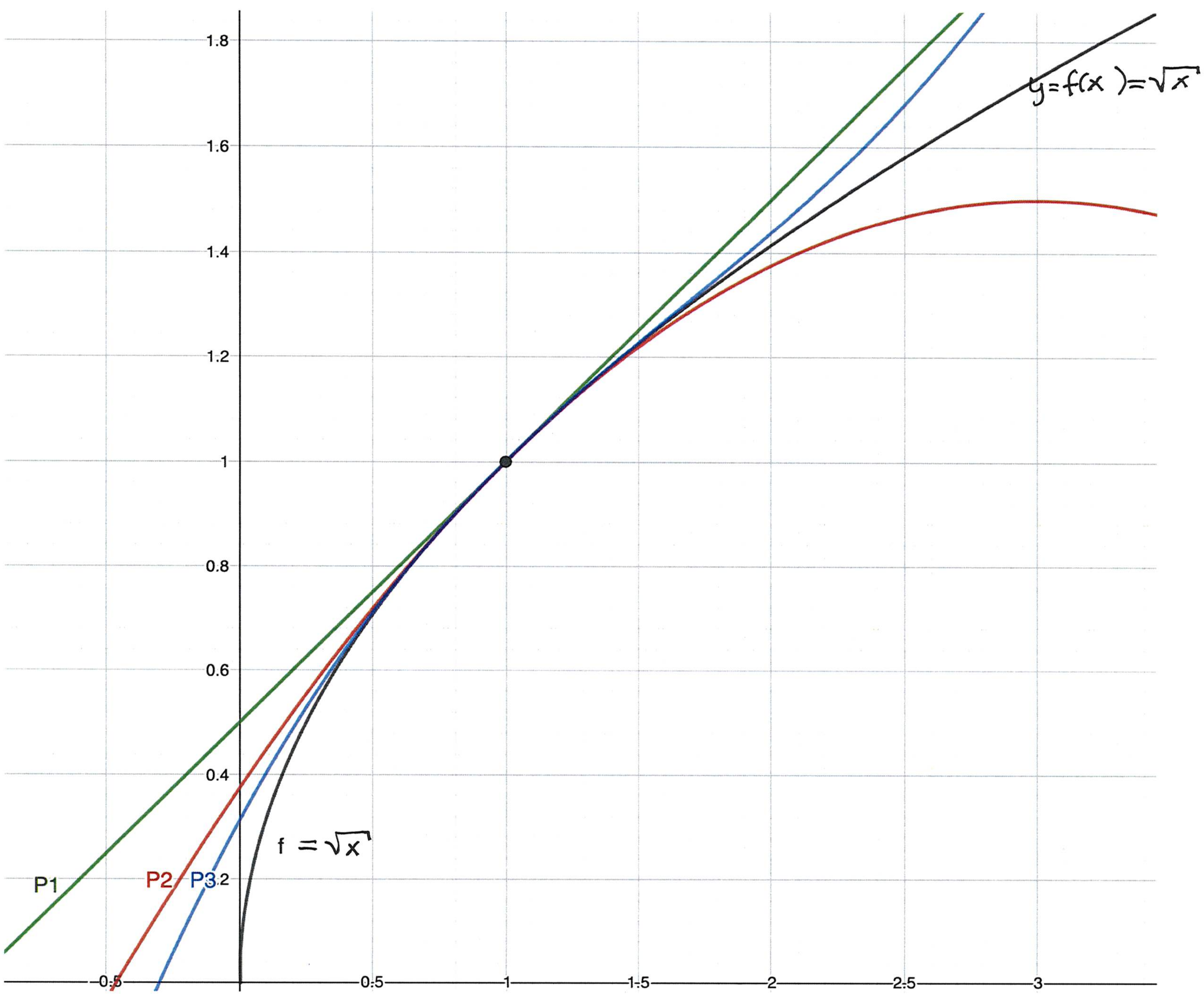
(sjekk: $\sqrt{1,2}=1,0954\ldots$) – mye bedre tilnærming enn for $x=2$.

Eks $f(x)=\sqrt{x}$ ved $x=1$ ($=a$)

Start: 9.01

Da er Taylorpolynomet til $f(x)$ av grad 3 ved $x=1$

$$P_3(x) = \underbrace{P_2(x)}_{\text{har allt gjort denne!}} + \frac{f'''(1)}{6}\cdot(x-1)^3$$



y=f(x)=√x
f =√x
P1
P2
P3
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \underbrace{\frac{1}{16}}_{=\frac{(3/8)}{6}}(x-1)^3$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$f'''(1) = \frac{3}{8 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{8}$$

$$P_3(1{,}2) = 1 + \frac{1}{2}(1{,}2-1) - \frac{1}{8}(1{,}2-1)^2 + \frac{1}{16}(1{,}2-1)^3$$

$$= 1{,}0955$$

Mønster (Taylorpolynomet av grad 3 ~~til~~ $f(x)$ ved $x = a$)

$$P_3(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}^{P_2(x)} + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

Taylorpolynomet av grad n for $f(x)$ ved $x=a$:

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ \text{hvor } n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

4. Om eksamen

- 12 oppg med samme vekt
  (noen har underpunkter i, ii, iii
- 3 timer (kl 9-12), finn ut hvor!
- Du skriver svar med begrunnelser på papir!
  (gjennomslagsark: kryss ut, ikke viske!)
- Jeg sensurer.
- Tips: Skriv bare én oppg. pr. ark
- Alle oppg. bør være (veldig) gjenkjennelige fra veiledningsoppg- og forelesningene
- Mange grunnleggende og sentrale temaer.
- Oppgavene er ikke ordnet etter semesterplan.
- Hjelpemidler på eksamen: BI-kalkulator & linjal
- Eksamen teller 40% på endelig karakter

5. Hvordan forberede seg

(1) Relevant stoff:
- forelesningsnotater
- veiledningsoppgaver
- tidligere (flervalgs)eksamener
- også læreboka

(2) Mitt beste tips

Prøv å gjøre oppgavene i hodet!
- hva er planen (i detalj)
- hva slags kunnskap kreves?
- hva slags problemer kan oppstå?

③ Hvis jeg får galt svar.
- hva har gått galt? - planen?
- utførelsen?

④ Når du har løst en oppg.
- hva har du lært?

⑤ Lær de <u>grunnleggende</u> tingene
veldig godt!
- definisjoner, begreper (ordene)

⑥ De enkle (grunnleggende) oppg.
er de viktigste!

<u>Eks</u> $e^x = 5$ og $\ln(x+3) = 2$