MET 1180, forelesning 23, 12. nov. 2024, Runar Ile

Plan: 1. Repetisjon: l'Hôpitals regel (oppg 1h)
Kostnadsfunksjoner
2. Elastisitet (kap. 4.9)

---

1. Repetisjon l'Hôpitals regel. For grenser $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- Deriverer teller og nevner hver for seg.
- Prøver å finne den samme grensen for den nye brøken.

Oppg 1h $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \overset{\text{l'Hôp}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{1}\right)}{\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \underline{\underline{2}}$

Betydning: Ingen vertikal asymptote for $x = 1$

Ekstra! $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \overset{\text{l'Hôp}}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \quad \Big| \cdot \frac{x\cdot 2\sqrt{x}}{x\cdot 2\sqrt{x}} = 1$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{0}}$$

Betydning: $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$ har horisontal asymptote $y = 0$

Kostnadsfunksjoner

Oppg 3c $K(x) = 400\cdot e^{0,001\cdot x^2}$ $(x \geq 0)$

① $K(0) = 400\cdot e^{0,001\cdot 0^2} = 400\cdot e^0 = 400 > 0$

② $K'(x) = 400\cdot 0,001\cdot 2x\cdot e^{0,001\cdot x^2}$
$= 0,8x\cdot e^{0,001\cdot x^2} \geq 0$ for $x \geq 0$

(3) $K''(x) \overset{\text{prod. reg. + litt kjerne-reg.}}{=} 0{,}8 \cdot e^{0{,}001 \cdot x^2} + 0{,}8x \cdot 0{,}001 \cdot 2x \cdot e^{0{,}001 \cdot x^2}$

$$= \underbrace{0{,}8}_{>0} \cdot \underbrace{\left(1 + 0{,}002 \cdot x^2\right)}_{>0} \cdot \underbrace{e^{0{,}001 \cdot x^2}}_{>0} > 0$$

Fordi $K''(x) > 0$, er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$K'(x) \overset{\text{fint resultat!}}{=} A(x) \qquad \left(A(x) = \frac{K(x)}{x}\right)$$

dvs $\quad 0{,}8x\, e^{0{,}001x^2} = \dfrac{400\, e^{0{,}001x^2}}{x} \qquad | \cdot x$

gir $\quad 0{,}8x^2 e^{0{,}001x^2} = 400\, e^{0{,}001x^2} \qquad | : e^{0{,}001x^2}$

dvs $\quad 0{,}8x^2 = 400 \qquad | : 0{,}8$

dvs $\quad x^2 = \dfrac{400}{0{,}8} = 500$

Så kostnadsoptimum er $x = \underline{\underline{\sqrt{500}}} = \underline{\underline{22{,}36}} \quad (x \geq 0)$

Den minimale enhetskostnaden er

$$A(\sqrt{500}) = K'(\sqrt{500}) = 0{,}8 \cdot \sqrt{500} \cdot e^{\overbrace{0{,}001 \cdot (\sqrt{500})^2}^{}}$$

$e^{0{,}5}$

$$= \underline{\underline{29{,}49}}$$

2. Elastisitet

p = pris/enhet

$D(p)$ = etterspørselen hvis prisen er p

= ant. solgte enheter hvis prisen er p.

Problemet med enheter.

Eks Et fat Nordsjøolje koster \$ 71,95

En liter ——— " ——— NOK 5.01

Priselastisteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

disse tallene er uavh. av valg av enheter

Start: 15.03

Eks På en måned synker prisen på en vare fra 12 tusen til 10 tusen og etterspørselen øker fra 50 mill. til 60 mill.

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{60-50}{50}\right)}{\left(\frac{10-12}{12}\right)} = \frac{\left(\frac{10}{50}\right)}{\left(\frac{-2}{12}\right)} = \frac{120}{-100} = \underline{\underline{-1,2}}$$

Tolkning Hvis prisen øker 1% fra 12 tusen vil etterspørselen falle med 1,2%.

<u>Teori</u> Anta at vi har en etterspørselfunksjon $D(p)$. Hvis prisen endres fra p til $p+h$, er relativ prisendring $\frac{p+h-p}{p} = \frac{h}{p}$

$$\frac{\text{relativ etterspørselendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

$$= \frac{\left(\frac{D(p+h) - D(p)}{D(p)}\right)}{\left(\frac{h}{p}\right)} \quad \Bigg| \cdot \frac{p \cdot D(p)}{p \cdot D(p)} = 1$$

$$= \frac{D(p+h) - D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$$\Big\downarrow h \to 0 \quad \text{(prisendringen nærmer seg 0)}$$

$$\mathcal{E}(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)} = \frac{D'(p) \cdot p}{D(p)}$$

Dette er den <u>momentane</u> priselastisiteten til etterspørselsfunksjonen $D(p)$.

<u>EKS</u> $D(p) = 50 - p$ for $0 < p < 50$

Da er $D'(p) = -1$ så $\mathcal{E}(p) = \frac{(-1) \cdot p}{50 - p} = \underline{\underline{\frac{-p}{50-p}}}$

<u>Viktig spørsmål</u>: Vil inntekten gå opp eller ned hvis prisen øker litt?

Inntekt $I(p) = p \cdot D(p)$

– er $I(p)$ avtagende eller voksende som en funksjon av p?

Altså: Er $I'(p)$ neg. eller pos.?

$$I'(p) \overset{\text{prod. reg.}}{=} 1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p)$$

$$= D(p) \cdot \left[1 + \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)} \right]$$

$$= \underbrace{D(p)}_{\text{alltid pos.}} \cdot \underbrace{\left[1 + \varepsilon(p) \right]}_{\text{pos. el. neg.?}}$$

Hvis $\varepsilon(p) < -1$
får vi neg. $I'(p)$
så $I(p)$ er avtagende
Kalles elastisk etterspørsel

Hvis $\varepsilon(p) > -1$
får vi pos. $I'(p)$
så $I(p)$ er voksende
Kalles uelastisk etterspørsel

Hvis $\varepsilon(p) = -1$
er $I'(p) = 0$
$I(p)$ har et stasjonært punkt
– nøytralelastisk etterspørsel

Eks $D(p) = 50 - p$, $0 < p < 50$

Fikk $\varepsilon(p) = \dfrac{-p}{50-p}$

Spørsmål: For hvilke priser p er etterspørselen elastisk?

Løsning: Løser ulikheten $\varepsilon(p) < -1$, dvs

$$\frac{-p}{50-p} < -1 \quad | +1$$

$$\frac{-p}{50-p} + 1 < 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{-p+50-p}{50-p} < 0$$

$$\text{dvs} \quad \frac{50-2p}{\underbrace{(50-p)}_{\text{er pos. fordi } p<50}} < 0 \quad \text{dvs} \quad 50-2p < 0$$

$$\text{dvs} \quad 50 < 2p \quad \text{dvs} \quad \underline{p > 25}$$

Så elastisk etterspørsel for $25 < p < 50$

Dessuten
uelastisk etterspørsel for $0 < p < 25$
og nøytralelastisk etterspørsel for $p = 25$