MET 1180, forelesning 22, 7. nov. 2024, Runar Ile

Plan
1. Grensekostnad, grenseinntekt, etc.
2. Kostnadsfunksjoner, kostnadsoptimum og optimal enhetskostnad

1. Grensekostnad, grenseinntekt, osv.

Intro: Diamanter og vann

Eks Kostnaden ved å fjerne x % av forurensningen i en innsjø.

$K(x)$ er kostnaden ved å produsere x enheter (av en vare)

$K'(x)$ er grensekostnaden ved x (marginal kostnad)

Tolkning Hva koster det å produsere én enhet mer enn x enheter?

$$= K(x+1) - K(x) = \frac{K(x+1)-K(x)}{1} \approx \lim_{h \to 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h} = K'(x)$$

Hvorfor $K'(x)$ – mye enklere matematikk, enklere å regne med!

$I(x)$ er inntekten av å selge x enheter

$I'(x)$ er grenseinntekten —— " ——

Eks x = antall tonn laks solgt.

$I'(50)$ = ekstra inntekt ved å selge ett tonn mer enn 50 tonn

– fordi $I'(50) \approx I(51) - I(50)$

Profittfunksjonen (x = ant. prod. og solgte enheter)

$$P(x) = I(x) - K(x)$$ (ofte $\Pi(x)$)

$P'(x)$ er grenseprofitten ved x

$$P'(x) = I'(x) - K'(x)$$

---

2. Kostnadsfunksjoner, kostnadsoptimum og optimal enhetskostnad

---

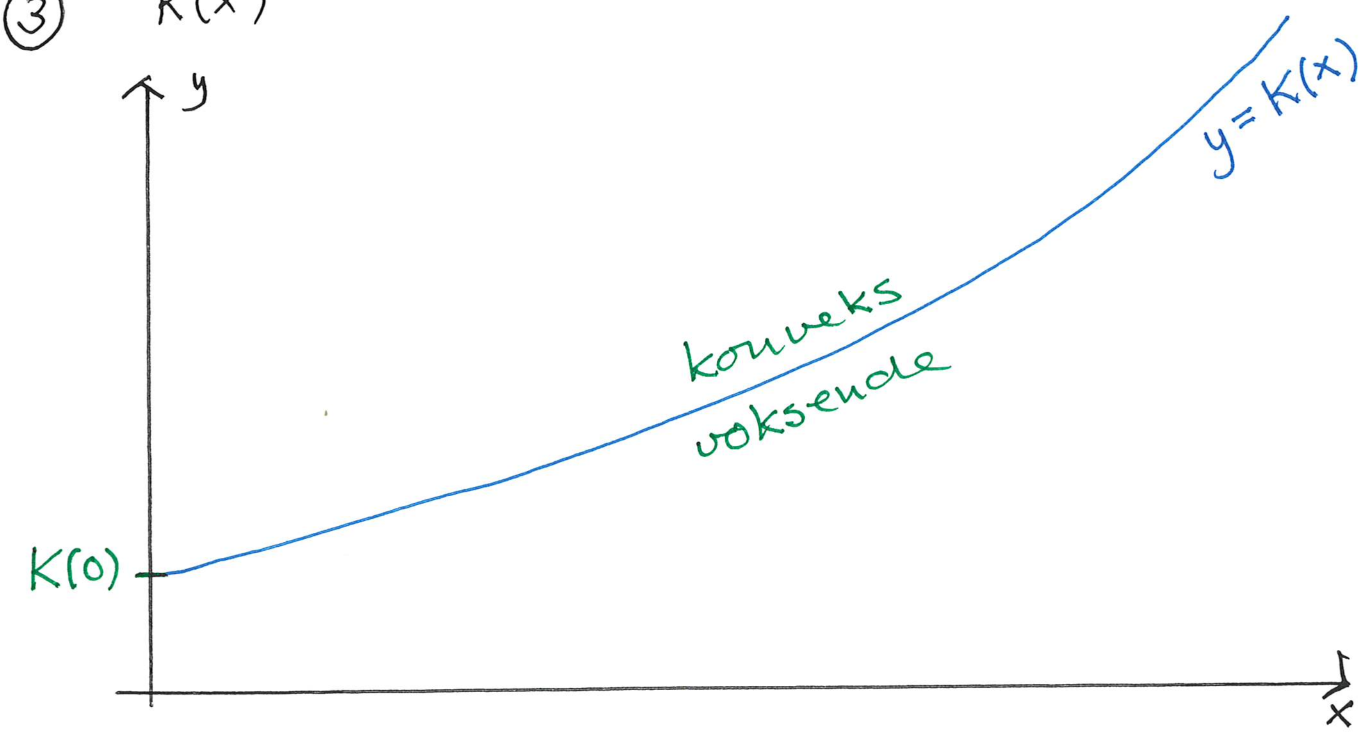
Den gjennomsnittlige enhetskostnaden ved å produser x enheter er

$$A(x) = \frac{K(x)}{x}$$ – ikke en konstant funksjon!

"average unit cost"

<u>Definisjon</u> $K(x)$ er en kostnadsfunksjon hvis

1. $K(0) > 0$ (startkostnader)
2. $K(x)$ er voksende ($K'(x) \geq 0$)
3. $K(x)$ er konveks ($K''(x) \geq 0$)



Definisjon Hvis $x = c$ er minimumspunktet for $A(x)$, kalles c for kostnadsoptimum.

– dvs x-verdien som gir lavest gjennomsnittlig enhetskostnad.

Resultat Hvis $K(x)$ er en kostnadsfunksjon med $K''(x) > 0$ for alle $x > 0$, så finnes det et kostnadsoptimum, og det er løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x)$$

Eks $K(x) = x^2 + 200x + 160\,000$

Dette er en kostnadsfunksjon fordi:

1. $K(0) = 160\,000 > 0$
2. $K'(x) = 2x + 200 > 0$ for $x \geq 0$
3. $K''(x) = 2 > 0$ for alle x, så $K(x)$ er strengt konveks.

Start: 9.03

Ved resultatet er kostnadsoptimum løsn. på likn.

$$K'(x) = 2x + 200 = \frac{x^2 + 200x + 160\,000}{x} = A(x)$$

dvs $$\cancel{2x} + \cancel{200} = \cancel{x} + \cancel{200} + \frac{160\,000}{x}$$

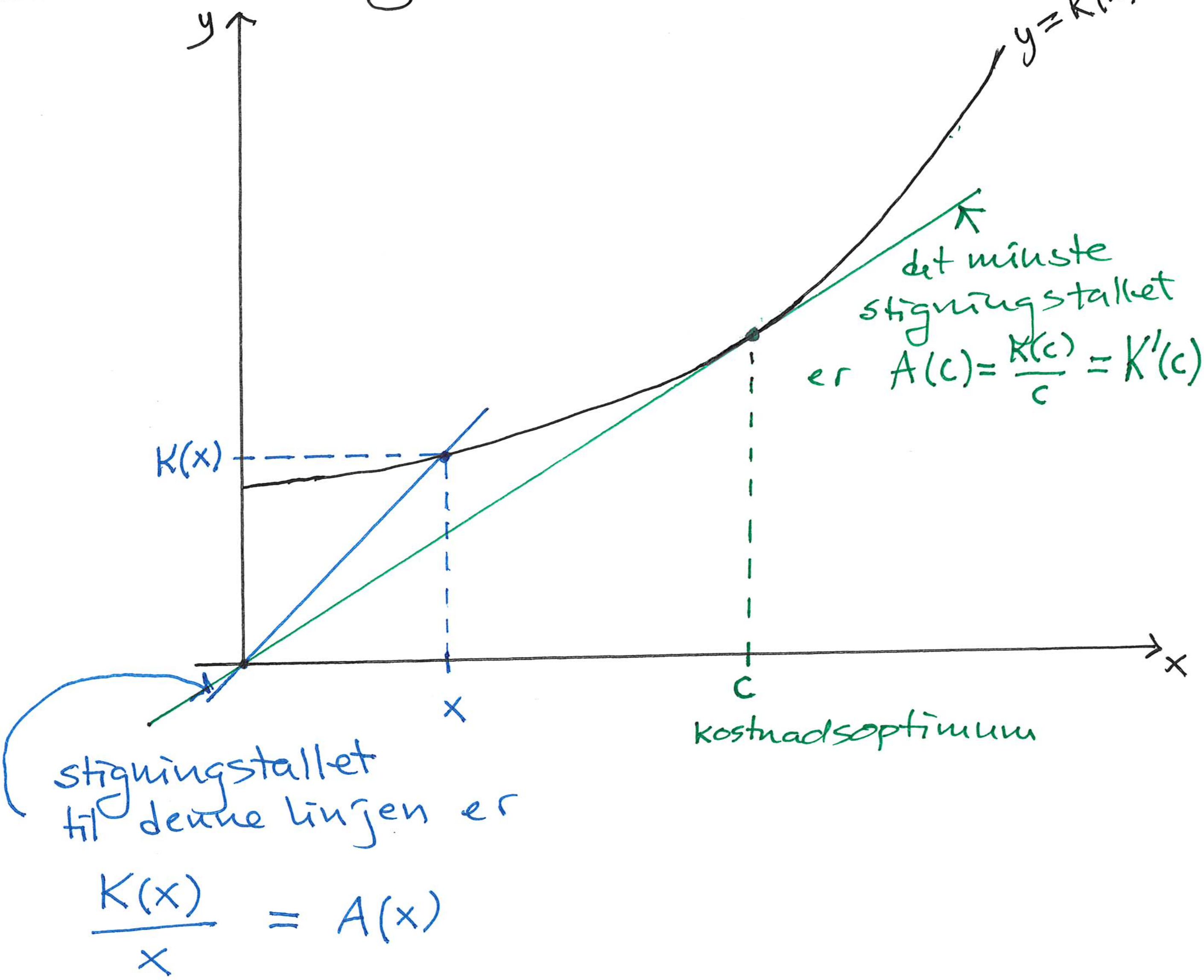
$$x = \frac{160\,000}{x} \quad | \cdot x$$

så $x^2 = 160\,000$ dvs $\underline{\underline{x = 400}}$ som er kostnadsoptimum ved resultatet.

Minimal gjennomsnittlig enhetskostnad

er $A(400) = K'(400) = 2 \cdot 400 + 200 = \underline{\underline{1000}}$

Geometrisk argument for resultatet



Så $A(c) = \dfrac{K(c)}{c}$ er minimal enhetskostnad når $K'(c) = A(c)$ = det minste stigningstallet til linjen gjennom origo og et punkt på grafen = stigningstallet til tangenten til $K(x)$ som går gjennom origo.

Algebraisk begrunnelse for resultat

„Finner" det stasjonære punktet til $A(x) = \frac{K(x)}{x}$.

Beregner

$$A'(x) = \left[\frac{K(x)}{x}\right]' \overset{\text{brøkregelen}}{=} \frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1}{x^2} \quad \left| \frac{:x}{:x} \right.$$

$$= \frac{K'(x) - A(x)}{x}$$

Så likningen $A'(x) = 0$ er ekvivalent med likningen

$$K'(x) - A(x) = 0 \quad \text{dvs} \quad K'(x) = A(x)$$

Antar $x = c$ er det stasjonære punktet, dvs

$A'(c) = 0$, dvs $K'(c) = A(c)$.

Er $x = c$ et (lok.) maks, min. eller terrassepunkt??

Bruker andrederiverttesten: Beregner

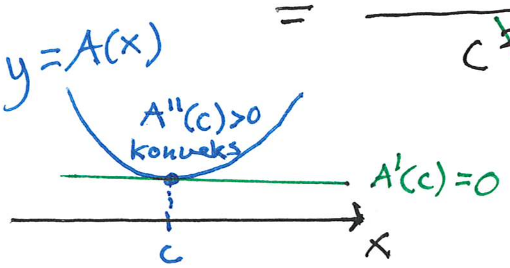
$$A''(x) \overset{\text{brøkregel}}{=} \frac{[K'(x) - A(x)]'\cdot x - [K'(x) - A(x)]\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{[K''(x) - A'(x)]\cdot x - [K'(x) - A(x)]}{x^2}$$

Substituerer $x = c$:

$$A''(c) = \frac{[K''(c) - \overbrace{A'(c)}^{=0}]\cdot c - \overbrace{[K'(c) - A(c)]}^{=0}}{c^2}$$

$$= \frac{K''(c)\cdot \cancel{c}}{c^{\cancel{2}}} = \frac{K''(c)}{c} > 0 \text{ (for } c > 0)$$



Så $x = c$ (løsn. på likn. $K'(x) = A(x)$) er et (lok.) minimumspunkt.