MET 1180, forelesning 21, 5. nov. 2024, Runar Ile

Plan: 1. Repetisjon (oppg. fra forrige uke)
1d) implisitt derivasjon
2 implisitt definerte kurver
6b) konvekse/konkave funksjoner
8b) konveks optimering

2. l'Hôpitals regel

1. Repetition

1d) $x^3 - 3xy + y^2 = 0 \qquad (*)$

Vi finner et uttrykk for y' i y og x ved å derivere begge sider av likningen m.h.p. x. Får ny likning med x, y og y', og løser den for y'.

Hjelpeberegninger:

$$(x\cdot y)'_x \overset{\text{prod. regel}}{=} (x)'_x \cdot y + x\cdot (y)'_x$$

$$= 1\cdot y + x\cdot y' = y + xy'$$

$$(y^2)'_x \overset{\text{kjerne-regel.}}{=} 2y\cdot y'_x = 2yy'$$

Fra $(*)$ får vi da

$$3x^2 - 3(y+xy') + 2yy' = 0$$

Løser likn. for y':

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 2yy' = 0$$

dvs $(2y-3x)y' = 3y - 3x^2 \qquad \Big| : (2y-3x)$

$$\underline{\underline{y' = \frac{3y-3x^2}{2y-3x}}} = \underline{\underline{\frac{3(y-x^2)}{2y-3x}}}$$

Antar $\underline{x=2}$ og løser (*) innsatt $x=2$

dvs $2^3 - 3\cdot 2\cdot y + y^2 = 0$

$$y^2 - 6y = -8$$

$$(y-3)^2 = -8+9 = 1$$

som gir $y-3 = 1$ el. $y-3 = -1$

dvs $\underline{\underline{y=4}}$ el. $\underline{\underline{y=2}}$

Vi bruker ettpunktsformelen til å finne tangentfunksjonene i punktene (2,4) og (2,2) på kurven.

$(2,4)$: $y' = \dfrac{3(4-2^2)}{2\cdot 4 - 3\cdot 2} = 0$ så tangentfunksjonen er konstant: $\underline{\underline{h_1(x) = 4}}$

$(2,2)$: $y' = \dfrac{3(2-2^2)}{2\cdot 2 - 3\cdot 2} = \dfrac{3\cdot(-2)}{-2} = 3$

Ettpunktsformelen: $h_2(x) - 2 = 3\cdot(x-2)$

dvs $\underline{\underline{h_2(x) = 3x - 4}}$

EBA1180 Mathematics for Data Science
autumn 2024
Exercises

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Lecture 19 – 20
Sec. 7.1, 6.9, 8.6-7:
Implicit differentiation. The second order derivative, convex/concave functions.

Here are recommended exercises from the textbook [SHSC].

Section **7.1** exercise 1, 4, 6, 7a
Section **6.9** exercise 1-4
Section **9.6** exercise 1-4, 6a
Section **8.6** exercise 1-4

Problems for the exercise session
Wednesday 30 Oct. 12–14+

Problem 1 Find an expression for y' in terms of y and x by implicit differentiation. Find all solutions for y with $x = a$ and determine the expression for the tangent function in each of these points.

a) $x^2 + 25y^2 - 50y = 0$ and $a = 4$

b) $x^{3.27}y^{1.09} = 1$ and $a = 1$

c) $x^4 - x^2 + y^4 = 0$ and $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x^3 - 3xy + y^2 = 0$ and $a = 2$

Problem 2 in figure 1 you see the graphs of the implicit defined curves in Problem 1. Determine the curves and the equations which belong together. Also draw the tangents in Problem 1.

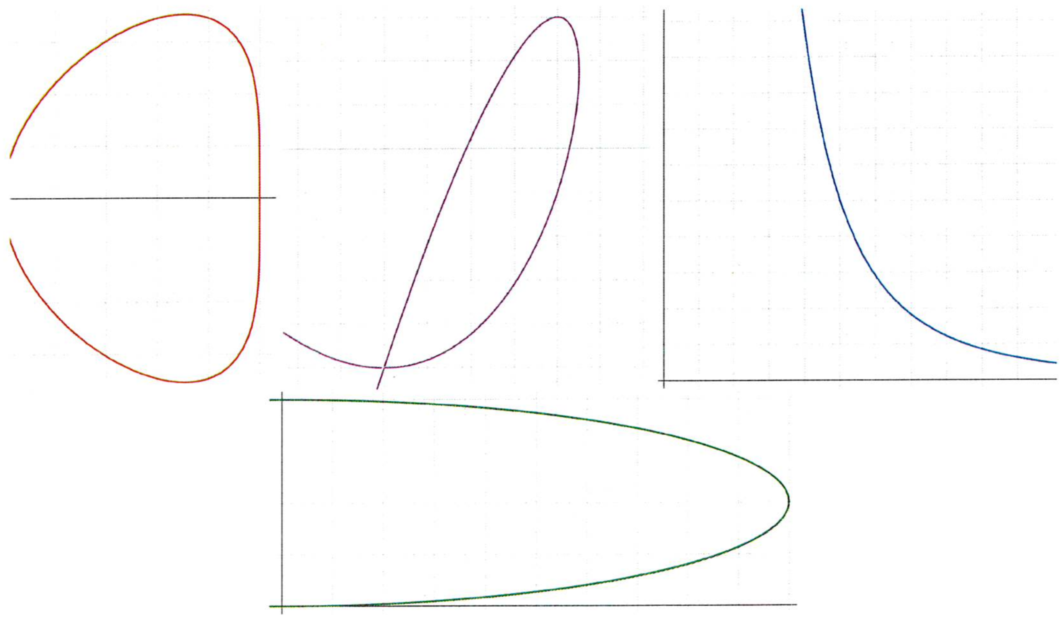


Figure 1: Four implicitly defined curves

2) Elliminasjon er strategien.

① I 1a, c og d er det to y-verdier én x-verdi. Ingen av disse kan være den blå kurven (den til høyre), så 1b må være den blå.

② Den røde (til venstre) og den grønne (nederst) er symmetriske om horisontale linjer. Da er også tangentene gjennom punkter med samme x-verdi symmetriske, dvs har like stigningstall med motsatt fortegn. Dette gjelder bare 1a og c. Så ~~1d~~ 1d må være den fiolette.

③ Hvis de tykke linjene er koordinatakser, vil den røde grafen gi én pos. og én neg. y-verdi for en gitt x-verdi, mens den grønne gir to pos. y-verdier. Dermed er

1a den grønne og
1c den røde grafen

– skulle også tegne inn tangentene.

6b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) - \frac{x}{4} + 1$

<u>Merk</u> $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$

så $f(x)$ er definert på hele tallinjen.

Kjerneregelen for $[\ln(x^2-2x+2)]'$

med $u = x^2 - 2x + 2$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'(x) = 2x - 2$ $\qquad g'(u) = \frac{1}{u}$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{1}{4}\cdot 1 + 0 = \underline{\underline{\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{1}{4}}}$$

$$f''(x) \overset{\text{brøk-regel}}{=} \frac{(2x-2)'\cdot(x^2-2x+2) - (2x-2)(x^2-2x+2)'}{(x^2-2x+2)^2} - 0$$

$$= \frac{2(x^2-2x+2) - \overbrace{(2x-2)(2x-2)}^{4x^2-8x+4}}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2x^2+4x}{(x^2-2x+2)^2}}} = \frac{-2x(x-2)}{[(x+1)^2+1]^2}$$

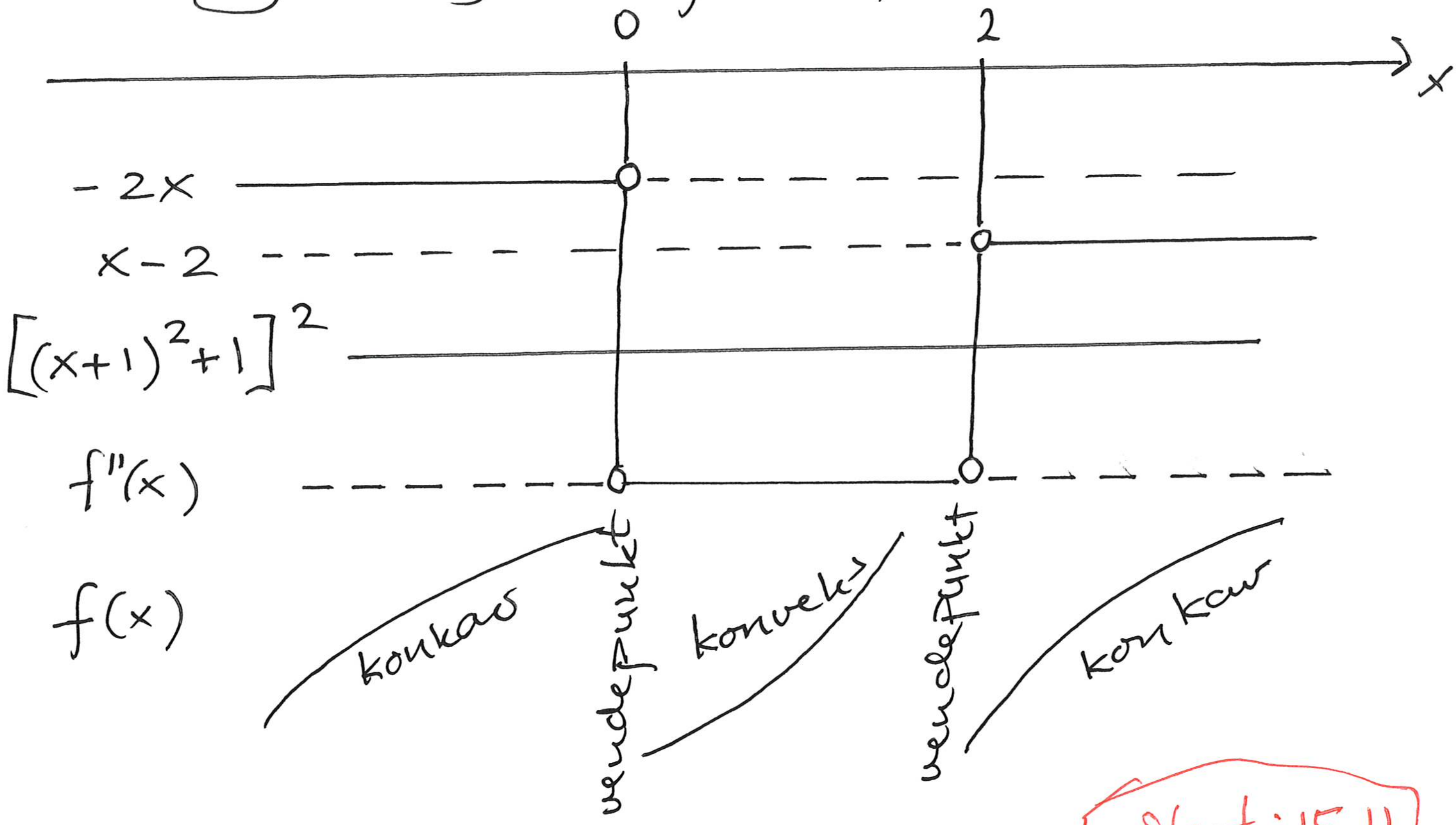
Konveks/Konkav for $f(x)$: Finner fortegnsskjema for $f''(x)$. Løser først likn. $f''(x) = 0$

dvs $-2x(x-2) = 0$ (og nevneren er ≥ 1)

dvs $-2x = 0$ el. $x - 2 = 0$

dvs $\underline{x = 0}$ el. $\underline{x = 2}$

Fortegnsskjema for $f''(x)$:



Start: 15.11

Konklusjon

$f(x)$ er konkav for x i $\langle \leftarrow, 0]$

— " — konveks — " — $[0, 2]$

— " — konkav — " — $[2, \rightarrow\rangle$

Dessuten er $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$ vendepunkter for $f(x)$ fordi $f''(x)$ skifter fortegn for $x = 0$ og $x = 2$.

8b) • Bestem de (lok.) maks/min.punktene for f(x).

• Bruk konveks/konkav for å avgjøre om de lok. maks/min er globale.

• Beregn maks/min for f(x).

$$f(x) = \frac{-1}{x(x-6)}, \quad D_f = \langle 0, 6 \rangle$$

• Beregner $f'(x) \overset{\text{brøk-regelen}}{=} \dfrac{2x-6}{[x(x-6)]^2}$

Stasjonære punkter: Løser likningen $f'(x)=0$

dvs $2x-6=0$ (og $x(x-6) \neq 0$)

$\underline{x=3}$ (og $3(3-6) \neq 0$ – så ok)

Telleren skifter fortegn fra − til + ved $x=3$, og nevneren er positiv, så $f'(x)$ skifter fortegn fra − til + ved $x=3$ og $\underline{\underline{x=3}}$ er derfor et (lok.) minimumspunkt.

• Beregner $f''(x) = \left[\dfrac{2x-6}{[x(x-6)]^2}\right]'$

Hjelperegning: $[x^2 \cdot (x-6)^2]' = 2x \cdot (x-6)^2 + x^2 \cdot 2(x-6) \cdot 1$

$= 2x \cdot (x-6)(x-6+x) = 2x(x-6)(2x-6)$

$$f''(x) \overset{\text{brøk-regel.}}{=} \frac{2\cdot x^2\cdot(x-6)^2 - (2x-6)\cdot 2x(x-6)(2x-6)}{\left[x^2(x-6)^2\right]^2}$$

$$= \frac{2\cancel{x}\cancel{(x-6)}\left[x(x-6) - \overbrace{(2x-6)^2}^{4x^2-24x+36}\right]}{x^{\cancel{4}\,3}\cdot(x-6)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2\left[-3x^2+18x-36\right]}{x^3(x-6)^3} = \frac{-6\left[x^2-6x+12\right]}{x^3(x-6)^3}$$

$$= \frac{-6\left[(x-3)^2+3\right]}{x^3(x-6)^3}$$

For $x \in \langle 0, 6\rangle$ er $x^3 > 0$ og $(x-6)^3 < 0$

Dessuten er $(x-3)^2 + 3 \geq 3$ så

$$f''(x) = \frac{\text{neg.}}{\text{neg.}} > 0 \text{ for alle } x \text{ i } D_f = \langle 0, 6\rangle$$

Da er $f(x)$ konveks for alle x i D_f

og $x = 3$ (det stasj. punktet)

er derfor et globalt minimumspunkt.

- Minimumsverdien til $f(x)$ er altså

$$f(3) = \frac{-1}{3(3-6)} = \frac{-1}{-9} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

– Ingen maksimale verdier fordi $f(x) \xrightarrow[x\to 6^-]{} \infty$

$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \infty$

2. l'Hôpitals regel

Grenser av typen $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Skrivemåte: $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ er det tallet som $f(x)$ nærmer seg mer og mer når x nærmer seg 5 mer og mer.

Eks $f(x) = \dfrac{3x-3}{\ln(x)}$. Vil finne $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

teller: $3x - 3 \xrightarrow[x \to 1]{} 3 \cdot 1 - 3 = 0$

nevner: $\ln(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \ln(1) = 0$

Altså „$\frac{0}{0}$"-uttrykk

Kan bruke l'Hôpital for å komme videre:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{l'Hôp}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(3x-3)'}{[\ln(x)]'} = \lim_{x \to 1} \frac{3}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{\left(\frac{1}{1}\right)} = \underline{\underline{3}}$$

f.eks. $f(0{,}99) = \dfrac{3 \cdot 0{,}99 - 3}{\ln(0{,}99)} = 2{,}9850$

og $f(1{,}01) = \dfrac{3 \cdot 1{,}01 - 3}{\ln(1{,}01)} = 3{,}0150$

NB Må være $\frac{0}{0}$ el. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Da deriverer vi teller og nevner for seg og prøver å finne grensen for den nye brøken.

Eks $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x}{e^x - 1}$

teller: $3x \xrightarrow[x\to 0]{} 3\cdot 0 = 0$

nevner: $e^x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 - 1 = 0$

så $\frac{0}{0}$.

$$\overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3}{e^x} = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$$

Eks $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$

"$\frac{\infty}{\infty}$" "$\frac{\infty}{\infty}$"